DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 12

(1) Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, der med hensyn til de sædvanlige baser for $\mathbb{R}^5$ og $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem $Ker(f)$.
(b) Bestem $\{x \in \mathbb{R}^5 \mid f(x) = (4, 3, 6)\}$.
(c) Angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^5)$.

(2) Teorien om lineære afbildninger $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ (eller vilkårlige komplekse vektorrum) er analoge med tilfældet $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Man skal blot erstatte reelle skalarer med komplekse skalarer i definitionen af linearitet.

En lineær afbildning $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ er i sædvanlige koordinater givet ved matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & i & 1 \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ i & -i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem afbildnings kerne og billedrum.
(b) Find fællesmængden $Ker(f) \cap f(\mathbb{C}^4)$ for kernen og billedrummet.
(c) Bestem mængden $\{x \in \mathbb{C}^4 \mid f(x) = (1, -i, -i, -1 + 2i)\}$.

(3) Lad en afbildning $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ væere givet ved

$$f(X) = AX - XA,$$

hvor A er en 2×2 matrix.
(a) Vis, at f er lineær.
(b) Lad nu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Bestem kernen for f.

(4) Lad en afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ være givet ved

$$f(P(x)) = (x - 1)P'(x) - xP(1).$$

(a) Vis, at f er lineær.
(b) Find afbildningsmatricen for f med hensyn til monomie-basis $(1, x, x^2)$.

(5) Lad afbildningen $f : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ være givet ved

$$f(x)\,(t) = \int_0^{\pi} x(t - s)s\,ds$$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og alle $x \in C^0(\mathbb{R})$. Regn følgende i hånden, men brug gerne Maple til integrationerne.
(a) Vis, at f er lineær.
(b) Vis, at underrummet U udspændt af basen $(1, \cos, \sin, \exp)$ ved f afbildes ind i sig selv.
(c) Angiv afbildningsmatricen for $f : U \to U$ med hensyn til den angivne basis.

1. Svar

(1) (a) $\text{Span}\{(1,-1,0,0,1),\ (5,-4,0,1,0),\ (1,-2,1,0,0)\}$.
(b) $(-2,3,0,0,0)+t_1\,(1,-2,1,0,0)+t_2\,(5,-4,0,1,0),+t_3\,(1,-1,0,0,1)$.
(c) Én basis er $v_1=(1,0,3),\quad v_2=(0,1,-2)$.

(2) (a) $\text{Ker}(f)=\text{span}\{(-i/2,\ -1-i,\ -1/2,\ 1)\}$.
Billedrummet $f(\mathbb{C}^4)=\text{span}\{(1,0,-i,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.
(b) $\text{Ker}(f)\cap f(\mathbb{C}^4)=\text{Ker}(f)$.
(c) $\{(1,\ 0,\ 0,\ -1-i)\ +\ t\ (\frac{1+i}{4},\ 1,\ \frac{1-i}{4},\ \frac{-1+i}{2})\mid t\in\mathbb{R}\}$.

(3) (a) –
(b) Kernen: $\left\{\begin{bmatrix} s+t & s \\ 0 & t\end{bmatrix}\ \middle|\ s,\ t\in\mathbb{R}\right\}$.

(4) (a) –
(b) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.