DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 11

(1) Lad **a**, **b**, **c** og **d** have koordinatvektorer hhv.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i et vektorrum V af dimension 3.

(a) Vis, at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ udgør en basis for V.

(b) Find koordinaterne til vektoren **d** m.h.t. basis $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

(2) I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (0, 0, 1),$$

samt vektorerne

$$b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (1, 2, 1), \quad b_3 = (1, 2, 2).$$

(a) Vis, at (a_1, a_2, a_3) og (b_1, b_2, b_3) begge udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
(b) Find basisskiftematricen ${}_aM_b$, der skifter fra b-koordinater til a-koordinater.
(c) Brug basisskiftematricen til at skrive vectoren $w = 2a_1 + a_2 - a_3$ som en linearkombination af b_1, b_2 og b_3. (Tjek svar!)

(3) I vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ er givet vektorerne

$$P_1(x) = 1 + x^2, \quad P_2(x) = -1 + x + x^2,$$

samt vektorerne

$$Q_1(x) = -1 + 3x + 5x^2, \quad Q_2(x) = -1 + 4x + 7x^2.$$

Lad endvider $U = \text{span}\{P_1(x), P_2(x)\}$.
(a) Vis, at $Q_1(x)$ og $Q_2(x)$ begge tilhører U.
(b) Vis, at $\mathbf{P} = (P_1(x), P_2(x))$ og $\mathbf{Q} = (Q_1(x), Q_2(x))$ begge udgør en basis for U.
(c) Find basisskiftematricen ${}_PM_Q$, der i U skifter fra Q-koordinater til P-koordinater.

(4) For delmængder M, N af et vektorrum V defineres $M + N$ som delmængden

$$M + N = \{u + v \mid u \in M, v \in N\}.$$

(a) Bevis, at hvis M og N er underrum af V, så er $M + N$ et underrum af V.

(b) Vis, at $M + N = \text{span}(M \cup N)$, dvs $M + N$ består af samtlige linearkombinationer af vektorer fra foreningsmængden $M \cup N$.

1. Svar

(1) (a) Vis, at a, b, og c er lineære uafhængige.
    (b) $[-1, 1, 2]^T$.

(2) (a) Vis lineære uafhængige.
    (b) ${}_aM_b := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
    (c) ${}_bw = {}_bM_a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(3) (a)
    (b)
    (c) ${}_PM_Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er svaret til ligning ${}_eM_aX = {}_eM_b$. Fordi rangen er to, kan dette også bruges til at svar på (a) og (b).