

DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 10

- (1) Lad der være givet følgende delmængder af vektorrummet $\mathbb{R}^n$:
- (a) Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, hvis første koordinat er et helt tal.
 - (b) Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, hvis første koordinat er nul.
 - (c) Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), hvori mindst én af de to første koordinater er nul.
 - (d) Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), hvori de første to koordinater tilfredsstiller ligningen $x_1 + 2x_2 = 0$.
 - (e) Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), hvori de første to koordinater tilfredsstiller ligningen $x_1 + 2x_2 = 1$.

Hvilke af disse delmængder er underrum af $\mathbb{R}^n$?

- (2) Lad $U \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ være mængden af 2×2 symmetriske matricer, dvs. en 2×2 matrix A tilhører U hvis og kun hvis $A = A^T$.
- (a) Vis, at U er et underrum i $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
 - (b) Bestem en basis for U og angiv dimensionen af U .
- (3) Vis, at følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$ er lineært uafhængige:
- (a) $a_1 = (0, -1, -1, -1)$, $a_2 = (1, 0, -1, -1)$, $a_3 = (1, 1, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$.
 - (b) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (3, 1, 1, 1)$.
- (4) I vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$ af reelle, kontinuerte funktioner definerede på $\mathbb{R}$ er givet vektorerne

$$f(t) = \sin^2 t, \quad g(t) = \cos(2t), \quad h(t) = 2.$$

Find dimensionen af $\text{span}\{f, g, h\}$.

- (5) Lad $P(\mathbb{R})$ betegner mængden af polynomier af arbitrær grad, dvs.

$$P(\mathbb{R}) = P_0(\mathbb{R}) \cup P_1(\mathbb{R}) \cup P_2(\mathbb{R}) \cup \dots,$$

med sædvanlig addition og multiplikation med skalar. Vis, at $P(\mathbb{R})$ er et underrum af $C^0(\mathbb{R})$ (vektorrummet af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

- (6) Lat V_1 og V_2 være to underrum af et vektorrum W :

- (a) Vis, at fællessmængden $V_1 \cap V_2$ er også et underrum af W .
- (b) Giv et modeksempel der viser at foreningsmængden $V_1 \cup V_2$ er generelt *ikke* et vektorrum. (Vink: tænk på fortolkning af et underrum i $\mathbb{R}^n$ som en linje, plan, hyperplan osv. gennem nullpunktet).
- (c) Hvad er specielle med de underrum i Opgave (5) der tillader at $P_0(\mathbb{R}) \cup P_1(\mathbb{R}) \cup P_2(\mathbb{R}) \cup \dots$ faktisk *er* et underrum? Giv et eksempel af tre forskellige underrum V_1 , V_2 og V_3 i $\mathbb{R}^3$, hvor det gælder at $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ er et underrum.

1. SVAR

- (1) (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Nej.
- (2) (a) Tjek, at nullvektoren tilhører U , og at U er stabil mht. addition og at gange med skalar.
(b) En mulige basis er $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dimensionen er 3.
- (3) Tjek, at rangen af matricen som har vektorerne som rækker (eller som søjler) har rang der er lig med antallet af vektorerne.
- (4) Identitet $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ kan bruges til at vise at dimensionen er 2.
- (5) Tjek, at nullvektoren tilhører $P(\mathbb{R})$, og at $P(\mathbb{R})$ er stabil mht. addition og at gange med skalar.
- (6) (a) Tjek, at nullvektoren tilhører foreningsmængden, og at foreningsmængden er stabil mht. addition og at gange med skalar.
(b) For eksempel, $V_1 = x$ -aksen, $V_2 = y$ -aksen i $\mathbb{R}^3$.
(c) $P_0(\mathbb{R}) \subset P_1(\mathbb{R}) \subset P_2(\mathbb{R}) \dots$