

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 10

[Svar på næste side]

- Bestem i ethvert af nedenstående tilfælde gradienten af den angivne funktion af to variable. Tegn også niveaukurver og gradientfelt i samme koordinatsystem vha. contourplot og gradplot.

(a) $f(x, y) = \text{Arctan}(y/x), \quad x \neq 0.$

(b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \neq (0, 0).$

- Bestem i ethvert af nedenstående tilfælde gradienten af den angivne funktion af tre variable. Tegn også niveauflader og gradientfelt i samme koordinatsystem vha. implicitplot og gradplot3d.

(a) $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)(z + x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

(b) $f(x, y, z) = x 3^{y+xz}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

(c) $f(x, y, z) = x \tan(yz^2) + \cos(x^3z), \quad yz^2 \neq (p + 1/2)\pi, p \in \mathbb{Z}.$

- Udregn den afledede af funktionen $F(u) = f(\mathbf{x}(u))$ ved hjælp af kædereolen, altså uden at bestemme $F(u)$ eksplicit, i følgende tilfælde:

(a) $f(x, y) = y^x, \quad \mathbf{x}(u) = (\sin u, u^3), \quad u > 0.$

(b) $f(x, y) = y \sin x, \quad \mathbf{x}(u) = (-u, \sqrt{1 + u^2}), u \in \mathbb{R}.$

- Giv en ligning for tangentplanen til hver af nedenstående grafer i den givne punkt (x_0, y_0, z_0) . Tegn flade og tangentplan i samme koordinatsystem vha. Maples plot3d.

(a) $z = x^2 + 2y^3, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3).$

(b) $z = xy + e^x, \quad (0, 0, 1).$

- Det kan vises, at differentialligningen

$$\frac{dw}{du} = w^2 + u^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

bland sine løsninger har

$$w = X(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{med } X(0) = 1,$$

og

$$w = Y(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{med } Y(0) = 2.$$

Lad nu

$$F(u) = f(X(u), Y(u)), \quad f(x, y) = \ln(1 + xy^2).$$

Bestem ved håndregning den afledede $F'(0)$.

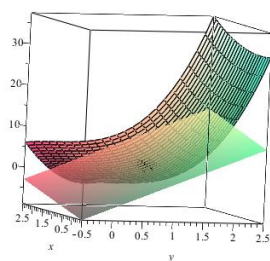
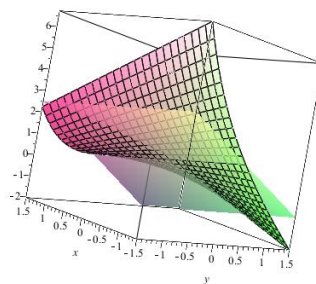
- Lad $P(x, y)$ være et *homogent* polynomium af grad n , dvs. $P(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$.

(a) Find for udtrykket $xP'_x(x, y) + yP'_y(x, y)$ en simpel formel (der ikke indeholder nogen partielle afledede).

(b) Formulér og vis en analog sætning for et homogent polynomium af grad n i k variable.

0.1. Svar.

1. (a) $(-y, x)/(x^2 + y^2)$.
 (b) $(x, y)/(x^2 + y^2)$.
2. (a) $(z^2 + y^2 + 2(yz + xy + zx), x^2 + z^2 + 2(yz + xy + zx), x^2 + y^2 + 2(yz + yx + zx))$
 (b) $(3^{y+xz}, x3^{y+xz} \ln 3, 0)$.
 (c) $\frac{1}{\cos(yz^2)} (\sin(yz^2) - 3x^2z \sin(x^3z) \cos(yz^2), xz^2, x(2yz - x^2 \sin(x^3z) \cos^2(yz^2)))$.
3. (a) $u^{-1+3 \sin u} (u \cos(u) \ln(u^3) + 3 \sin(u))$.
 (b) $-\frac{u \sin u + (1+u^2) \cos u}{\sqrt{1+u^2}}$.
4. Se figur.

(a) $z = -5 + 2x + 6y$.(b) $z = 1 + x$.

5. 4.

6. (a) $xP'_x(x, y) + yP'_y(x, y) = nP(x, y)$.