

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 9

[Svar på næste side]

1. Bestem og skitsér i ethvert af nedenstående tilfælde definitionsområdet for det angivne funktionsudtryk.

(a) $f(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2}$.

(b) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{(x - \frac{1}{2})(x^2 + y^2)}$.

(c) $f(x, y) = \text{Arcsin}(2 - x^2 - y)$.

2. Beskriv i ethvert af nedenstående tilfælde definitionsområdet for det angivne funktionsudtryk.

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$.

(b) $f(x, y, z) = \ln(1 - |x| - |y| - |z|)$.

(c) $f(x, y, z) = \text{Arcsin}(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$.

(d) $f(x, y, z) = \exp(3x + 2y + 5z)$.

3. Find mindsteværdien for funktionen

$$f(x, y) = \exp(|x - y|) + \exp(|x + y|), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Undersøg, om f har en størsteværdi.

4. Find størsteværdien for funktionen

$$f(x, y, z) = \sin(x + y - z) - (x + y + z)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

og angiv mængde, hvor størsteværdien antages. Har f en mindsteværdi?

5. For hver af de nedenfor givne funktioner af to variable gælder, at definitionsområdet ikke er hele planen, men $\mathbb{R}^2 \setminus M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin M\}$, hvor $M \neq \emptyset$ (dvs. M ikke er tom). Angiv i hver tilfælde punktmængden M , og gør rede for, at $f : \mathbb{R}^2 \setminus M \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert. Undersøg endelig, om funktionerne har en kontinuert udevidelse, enten til $\mathbb{R}^2$ eller til $\mathbb{R}^2 \setminus L$, hvor $L \subset M$.

(a) $f(x, y) = \frac{3x-2y}{2x-3y}$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$.

(c) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

0.1. Svar.

1. (a) $\{(0, 0)\}$.
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, \text{ og } x \geq \frac{1}{2}\}$.
 (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - \pi/2 \leq y + x^2 \leq 2 + \pi/2\}$.
 (d) $\mathbb{R}^3$.

3. Mindsteværdien er 2. Ingen størsteværdi.

4. Størsteværdien er 1, som antages på

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = \frac{1 + 4k}{4}\pi, z = -\frac{1 + 4k}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ingen mindsteværdi.

5. (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{3}x\}$. Ingen kontinuert udvidelser til $\mathbb{R}^2$, eller til $\mathbb{R}^2 \setminus L$ hvor $L \subset M$.
 (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$. Kan udvises til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x, y) = x + y$.
 (c) $M = \{(0, 0)\}$. Ingen kontinuert udvidelser.