DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 7

(1) Find $\bar{z}$, $|z|$, $1/z$, og realdelen og imaginærdelen $\Re(z)$ og $\Im(z)$ af de følgende tal. Indtegn de fundne tal i den komplekse plan. Tjek svar med Maple.
  (a) $z = 2\pi$,
  (b) $z = i\pi$,
  (c) $\frac{(2+3i)(3-4i)}{1-2i}$,
  (d) $z = 12e^{i1024\pi}$.

(2) Benyt fortolkningen af et komplekst tal som et punkt i den komplekse talplan til at angive hver af de nedenstående punktmængder på en figur.
  (a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 3\}$,
  (b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-(2-i)| > 1\}$.

(3) Integn hvert af de følgende tal i den komplekse plan, og brug dette til at beregne $a + bi$ formen af dem.
  (a) $3e^{i\frac{3\pi}{4}}$,
  (b) $3e^{\frac{11\pi}{4}i}$.

(4) Integn følgende komplekse tal i den komplekse plan. Derefter skriv tallene på $re^{i\theta}$ form.
  (a) $1 - i$.
  (b) $\frac{5}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

(5) Brug polær form til at reducere følgende udtryk:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^9.$$

Find det mindste positive heltal n der opfylder

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^n = 1.$$

(6) Lad z og w være komplekse tal. Vis, at $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. (Er det nemmere at vise det hvis man skriver disse tal på rektangulær form eller på polær form?)

(7) Lad $z_0 \neq 0$ være et givet komplekst tal. Hvilket komplekst tal svarer til spejlbilledet af z_0 i
  (a) nulpunktet,
  (b) den reele akse,
  (c) den imaginære akse
  (d) vinkelhalveringslinien i første og tredje kvadrant.

(8) Lad w være en kompleks løsning til ligningen $w^n = 1$, og antag også at $w \neq 1$. Vis, at

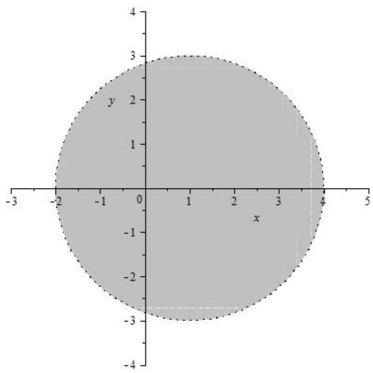
$$1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0.$$

(Vink: begynd med at sætte $X = 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1}$ og gang det med w.)

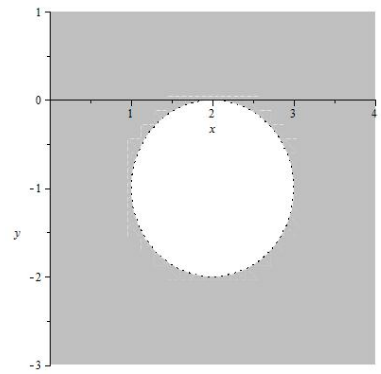
1. Svar

(1) Brug Maple.

(2) Se Figur



M_1



M_2

(3) (a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}I$.
(b) $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}I$.

(4) (a) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. (b) $5e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

(5) (a) $5^9 e^{\frac{3}{4}\pi i}$. (b) 8.

(6) Brug, at $\overline{(re^{i\theta})} = re^{-i\theta}$.

(7) (a) $-z$. (b) $\bar{z}$. (c) $-\bar{z}$. (d) $i\bar{z}$.