DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 7

[Svar på næste side]

1. Lad $\mathbb{R}^4$ være udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Finde en ortonormal basis for det underrum af $\mathbb{R}^4$, der udspændes af $(1,0,2,2)$ og $(2,-1,6,2)$.

2. I $\mathbb{R}^3$ er givet vektorerne $x_1 = (1,2,2)$, $x_2 = (1,0,-2)$ og $x_3 = (0,-1,-2)$, samt $y_1 = (1,1,0)$ og $y_2 = (2,3,2)$. Lad $U = \operatorname{span}\{x_1, x_2, x_3\}$.
   (a) Find dimensionen af U og en basis for U.
   (b) Bestem en ortonormal basis for U med hensyn til det sædvanlige skalarprodukt i $\mathbb{R}^3$.
   (c) Vis, at $\operatorname{span}\{y_1, y_2\} = U$.

3. I $\mathbb{R}^4$, der tænkes udstyret med det sædvanlige skalarprodukt, er givet vektorerne

$$u_1 = (1,1,-1,-1), \quad u_2 = (1,-1,1,-1),$$
$$v_1 = (2,-2,-2,2), \quad v_2 = (1,0,0,1).$$

   Lad $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ og $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.
   (a) Vis, at enhver vektor i U er ortogonal på enhver vektor i V.
   (b) Best en ortonormal basis (a_1, a_2, a_3, a_4) for $\mathbb{R}^4$, således at $a_1, a_2 \in U$ og $a_3, a_4 \in V$.

4. Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{bmatrix},$$

   hvor $a \in \mathbb{R}$. Bestem de værdier af a, for hvilke A er ortogonal.

5. Lad $\mathbb{R}^4$ være udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved afbildningsmatricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   mht. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^4$. Vis, at man kan vælge en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ således, at f i denne fremstilles ved en diagonalmatrix. Bestem en sådan basis og afbildningsmatricen med hensyn til denne.

6. Vis, at de to kvadratiske former $P_1(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4\sqrt{2}yz$ og $P_2(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 4yz + 4xy$ kan reduceres til den samme kvadtratiske form

$$a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2, \quad (a < b < c),$$

   og bestem for enhver af disse former en ortogonal substitution, der udfører denne reduktion.

0.1. **Svar.**

1. $\frac{1}{3}(1,0,2,2), \quad \frac{1}{3}(0,-1,2,-2)$.

2. (a) Basis $(1,2,2), \quad (2,1,-2)$, dimension 2.
   (b) $b_1 = \frac{1}{3}(1,2,2), \quad b_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.
   (c) $b_1 = \frac{1}{3}(y_2 - y_1)$ og $b_2 = \frac{1}{3}(4y_1 - y_2)$. Derfor er $U = \text{span}\{b_1, b_2\} \subseteq \text{span}\{y_1, y_2\}$. Desuden har vi $\text{Dim}(U) = \text{Dim}(\text{span}\{y_1, y_2\})$. Det følger heraf, at $U = \text{span}\{y_1, y_2\})$. En anden måde er, at kigge på trappeform af de to matricer der har b_1, b_2 og y_1, y_2 som rækker.

3. (a) Tag prikprodukter.
   (b) $a_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \quad a_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \; a_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \; a_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.

4. $a = \pm\sqrt{2}/2$.

5. A er symmetrisk, derfor ortogonalvis diagonaliserbar.
   Basis $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,0,1), \quad \frac{\sqrt{6}}{6}(1,0,2,1), \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(1,3,-1,1)$.
   Afbildningsmatrix $Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.
   $$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$