DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 5

[Svar på næste side]

1. Brug Maple til at finde egenværdierne og egenvektorerne for følgende matricer:

$$a: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad d: \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Brug egenværdierne og egenvektorerne til at afgøre om hvilke matricer der er diagonliserbar over $\mathbb{R}$.
   (b) Svar på samme spørgsmål over $\mathbb{C}$.
   (c) Til dem (eller den) der var diagonliserbar (over $\mathbb{R}$ eller over $\mathbb{C}$), angiv en diagonalmatrix Λ og en regulær matrix V, så $\Lambda = V^{-1}AV$, hvor A betegner oprindelige matricen.

2. Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

0.1. **Svar.**

1. (a) Kun a.
   (b) a og d.
   (c) a: $V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $\quad d$: $V = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $x_h = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (eller $x_p = \begin{bmatrix} 2-c \\ c \end{bmatrix}$, c nogen bestemt konstant).
   Fuldstændige løsning: $x = x_h + x_p$.

3. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/13 \\ -7/13 \end{bmatrix}$.