DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 4

[Svar på næste side]

1. (a) Find samtlige *komplekse* løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2 + 3x_3, \\ x_2' &= 3x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_3' &= -x_1 \quad + \quad 2x_3. \end{aligned}$$

   (b) Find samtlige *reelle* løsninger til differentialligningssystemet.

2. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} -28 & 24 & 43 \\ -40 & 34 & 63 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

   (a) Find egenværdier og egenvektorer for A vha. Maple.
   (b) Angiv den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet $\dot{x} = Ax$ ved brug af egenværdimetoden.
   (c) Find den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet $\dot{x} = Ax$.
   (d) Find den løsning til $\dot{x} = Ax$, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x\,(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Bemærk, at denne løsning kan findes enten ved indsættelse af $t = 0$ i den fuldstændige komplekse eller i den fuldstændige reelle løsning.

3. Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= x_1(t) + x_2(t), \\ x_2''(t) &= 2x_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Omskriv ligningsystemet som en 1. ordens differentialligningsystem ved $x_3 = x_1'$ og $x_4 = x_2'$.
   (b) Løs 1. orden systemet ved at finde egenværdierne og egenvektorerne for systemsmatricen.
   (c) Skriv den fuldstændige løsning for (1).

4.

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{2}$$

   (a) Find den fuldstændige løsning til (2) ved håndkraft.
   (b) Find den fuldstændige løsning til (2) ved at omskrive systemet til differentialligningssystem af første orden og at løse det ved egenværdimetoden.

5. (a) Løs differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 4x_1(t) \quad + \quad x_3(t), \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t), \\ x_3'(t) &= -2x_1(t) \quad + \quad x_3(t). \end{aligned}$$

   (b) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 2$.

0.1. **Svar.**

1. (a) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C_1 e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} i \\ 2-i \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{(2-i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 2+i \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, C_i \in \mathbb{C}.$$

   (b) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - 2\sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + A_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) + \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix} + A_3 e^{4t} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$
   $A_i \in \mathbb{R}$.

2. (b) $$C_1 e^{(-2+i)t} \begin{bmatrix} -2+i \\ -4+i \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{(-2-i)t} \begin{bmatrix} -2-i \\ -4-i \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{C}$$

   (c) $$C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 5\sin t \\ 9\sin t + 2\cos t \\ -2\sin t - \cos t \end{bmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 9\cos t - 2\sin t \\ -2\cos t + \sin t \end{bmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

   (d) $$\begin{bmatrix} -8e^{-2t}\sin t + 4e^{-2t}\cos t - 3e^{4t} \\ 4e^{-2t}\cos t - 16e^{-2t}\sin t - 4e^{4t} \\ 4e^{-2t}\sin t \end{bmatrix}.$$

3. (a) Systemsmatrix: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (c) $(x_1, x_2) = C_1 e^{t}(1,0) + C_2 e^{\sqrt{2}t}(1,1) + C_3 e^{-\sqrt{2}t}(1,1) + C_4 e^{-t}(1,0)$.

4. $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$.

5. (a) $$C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (b) $$\begin{bmatrix} -2e^{2t} + 2e^{3t} \\ 4e^{2t} - 2e^{3t} - 3e^{t} \\ 4e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}.$$