DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 3

[Nogle svar på næste side]

(1) Antag, at A og B er similære kvadratiske matricer. Hvilke af følgende sætninger er gyldige?
   (a) $\det A = \det B$.
   (b) $\rho(A) = \rho(B)$, hvor ρ betegner rangen.
   (c) $\ker A = \ker B$, hvor $\ker X$ betegner kernen af afbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der har X som afbildningsmatricen mht. den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^n$.
   (d) $\text{spor} A = \text{spor} B$.

(2) Find egenværdier og tilhørende egenvektorer for følgende matricer. Giv algebraiske og geometriske multiplicitet for hver egenværdi.:

$$(a): \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (b): \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}, \quad (c): \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3) Lad f betegne den lineære afbildning af $\mathbb{R}^3$ in i $\mathbb{R}^3$, der med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Find egenværdierne og de tilsvarende egenvektorer for f.
   (b) Find løsningsmængden til ligning $f(x) = x$.

(4) To $n \times n$ matricer A og B antages at have n lineært uafhængige vektorer som fælles egenvektorer. Vis, at $AB = BA$.

(5) Vis, at matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og,} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

har samme karakteristiske polynomium, men ikke er similære.

0.1. **Svar.**

(1) (a) Gyldigt.
(b) Gyldigt.
(c) Ikke gyldigt.
(d) Gyldigt. (Husk at spor er lig med summen af egenværdierne).

(2) (a) $\lambda = -1$, $v_{-1} = [0, -1, 1]^t$, $am(-1) = 1$, $gm(-1) = 1$.
$\lambda = i$, $v_i = [1 + i, 1, 1]^t$, $am(i) = gm(i) = 1$.
$\lambda = -i$, $v_{-i} = [1 - i, 1, 1]^t$, $am(-i) = gm(-i) = 1$.

(b) $\lambda = 2 - 2i$, $v_\lambda = [-1, 0, 1]^t$, $am(\lambda) = gm(\lambda) = 1$.
$\lambda = 2$, $v_\lambda = [1, 0, 1]^t$, $am = gm = 1$.
$\lambda = 1 + i$, $v_\lambda = [0, 1, 0]^t$, $am = gm = 1$.

(c) $\lambda = -1$, $v_\lambda = [3/2, 0, 1/2, 1]^t$, $am = gm = 1$.
$\lambda = 0$, $v_\lambda = [2, 1, 0, 1]^t$, $am = 2$, $gm = 1$.
$\lambda = 1$, $v_\lambda = [3/4, 0, 1/4, 1]^t$, $am = gm = 1$.

(3) (a) $\lambda = 3$, $v_3 = (-1, 0, 1)$. $\lambda = 1$, $v_1^1 = (0, -2, 1)$, $v_1^2 = (1, 0, 0)$.
(b) $\operatorname{span}\{(0, -2, 1), (1, 0, 0)\}$.

(4) Vink: Skift basis, og bemærk, at

$$AB = BA \quad \Leftrightarrow \quad (M^{-1}AM)(M^{-1}BM) = (M^{-1}BM)(M^{-1}AM).$$

(5) Karateristiske polyonium: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$. Similære matricer har den samme egenværdier med den samme geometriske multipliciteter. Men for A har egenværdien 1 geometriske multiplicitet 2, mens for B har vi $gm(1) = 1$.