DESIGNMAT EFTERÅR 2011: EKSTRA-OPGAVER, UGE 2

[Nogle svar på næste side]

(1) Lad V være et vektorrum af dimension 2, og lad (a_1, a_2) være en basis for V. Lad endvidere være givet to lineære afbildninger f og g af V ind i V. Det oplyses, at

$$\begin{aligned} g(a_1) &= 3a_1 - a_2, \\ g(a_2) &= a_1, \\ f(a_1) &= a_1 - a_2, \\ f(3a_1 - a_2) &= 2a_1 - a_2. \end{aligned}$$

(a) Bestem $f(a_2)$.
(b) Angiv afbildningsmatricen for f og for g m.h.t. basis (a_1, a_2).
(c) Afgør, om $f \circ g = g \circ f$.

(2) Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineær afbildning, der med hensyn til den sædvanlige basis (e_1, e_2, e_3) for $\mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (-1, 1, 0)$ og $b_3 = (1, 0, 0)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
(b) Find afbildningsmatricen ${}_bF_b$ for f m.h.t. basen $b = (b_1, b_2, b_3)$.
(c) Kontrollere din svar, feks. ved at finde koordinatvektorerne $[e_1]_b$ og $[f(e_1)]_b$ for e_1 og $f(e_1)$ mht. basen b, og derefter tjek at ${}_bF_b[e_1]_b = [f(e_1)]_b$.

(3) I $\mathbb{R}^3$ er givet vektorerne

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

(a) Vis, at v_1, v_2, v_3 udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
(b) En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved

$$f(v_1) = (3, 9, 1, 0), \quad f(v_2) = (4, 5, -1, 1), \quad f(v_3) = (5, 6, 0, -1).$$

Giv afbildningsmatricen ${}_eF_v$ for f mht. basen (v_1, v_2, v_3) i $\mathbb{R}^3$ og den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^4$.
(c) Bestem afbildningsmatricen ${}_eF_e$ for f mht. de sædvanlige baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$.

(4) En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved

$$\begin{aligned} f((1, 0, 0)) &= (2, 1, 0, 1), \\ f((1, 1, 0)) &= (3, 2, 1, 1), \\ f((0, 1, 2)) &= (3, -1, -5, 4). \end{aligned}$$

(a) Bestem afbildningsmatricen for f m.h.t. de sædvanlige baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$.
(b) Bestem dimensionen af $\mathrm{Ker} f$ og bestem en basis for $\mathrm{Ker} f$.
(c) Bestem dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$ og bestem en basis for det.

(5) Lad en afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ være givet ved

$$f(P(x)) = (x - 1)P'(x) - xP(1),$$

hvor $P' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$.
(a) Tjek, at f er faktisk en afbildning $P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dvs. hvis P har højest grad 2, så også har $f(P)$ højest grad 2.
(b) Vis, at f er lineær.
(c) Find afbildnigsmatricen for f med hensyn til monomie-basis $(1, x, x^2)$.

0.1. **Svar.**

(1) (b) ${}_aG_a = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ${}_aF_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Ja, fordi ${}_aF_a\,{}_aG_a = {}_aG_a\,{}_aF_a$.

(2) (b) ${}_bF_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $[e_1]_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $[f(e_1)]_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(3) (c) ${}_eF_e = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(4) (a) ${}_eF_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) En basis for $\mathrm{Ker}(f)$ er $((-2,3,1))$. Dimension 1.

(c) En basis for $f(\mathbb{R}^3)$ er $((1,0,-1,1),(0,1,2,-1))$. Dimension 2.

(5) (b) Vi viser lineæritet:

$$\begin{aligned} f(P_1+P_2) &= (x-1)(P_1+P_2)' - x(P_1(1)+P_2(1)) \\ &= (x-1)P_1' + (x-1)P_2' - xP_1(1) - xP_2(1) \\ &= f(P_1)+f(P_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(cP) &= (x-1)cP' - xcP(1) \\ &= c((x-1)P' - xP(1)) \\ &= cf(P). \end{aligned}$$

(c) Afbildningsmatricen $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.