DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 5

(1) Find A^{-1}, B^{-1} og $(AB)^{-1}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Udregn $A^T A$.
(b) Afgør, om $A^T A$ har en invers.
(c) Gør de samme med AA^T.

(3) Givet

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vis, at B er regulær, og bestem B^{-1}. Brug dette til at løse matrixligningen

$$XB = A.$$

(4) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

og 4×4-enhedsmatricen betegnes som I_4. Vis, at matrixligningen $AXA = I_4$, har netop én løsning, og udregne den.

(5) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Udregn $\det A$, og derefter $\det(A^{-1}A^T A)$.

(6) Antag at $a \in \mathbb{R}$. Sæt

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Find $\det A$, og angiv rangen af A for enhver værdi af a.

(7) Lad $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ og $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, hvor $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.
   (a) Løs ligningen $Ax = b$. (Brug enten Gauss-Jordan elimination eller Maple LinearSolve).
   (b) Find A^{-1} og $x = A^{-1}b$.
   (c) Kontrollér, at det er den samme løsning x, som optræder i de to udregninger ovenfor.
   (d) Vis, at elementerne i x begge kan skrives som en kvotient af to determinanter. Dette resultat kaldes *Cramers formel*. Formlen kan udvides til $n \times n$ systemer. Sætningen gælder med den vigtige forudsætning, at $\det A \neq 0$.

(8) Lad A være en regulær matrix, og antag at alle elementer i A er hele tal. Hvornår er elementerne i A^{-1}også hele tal? (Vink: læs om Cramers Løsningsformel).

1. Svar

(1) Check med Maple.
(2) Check med Maple.
(3) $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
(4) $\begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 & -7/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(5) -14 og -14.

(6) $(a-1)^2(a+1)^2$. Rangen er 2 når $a = \pm 1$. Ellers er den 4.

(7) (a) $x = \begin{bmatrix} \dfrac{-a_{12}b_2 + b_1 a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}$.
   (b) $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.
   (d) $-a_{12}b_2 + b_1 a_{22} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, osv.