DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 4

(1) Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{bmatrix},$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestem for ethvert $a \in \mathbb{R}$ rangen af A (man kan bruge Maple til at gør Gauss-Jordan elimination).

(b) Find for ethvert $a \in \mathbb{R}$, samtlige løsninger til matrixligningen

$$AX = A.$$

(2) Idet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+3 & 5 \\ -1 & a-3 & a+2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & a+4 \end{bmatrix},$$

hvor $a \in \mathbb{R}$, ønskes de værdier af a bestemt, for hvilke matrixligningen $AX = B$ har mindst én løsning. (Brug Maple til Gauss-Jordan elimination).

(3) Idet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ a+1 & 3 \\ a+1 & 4 \end{bmatrix},$$

hvor $a \in \mathbb{R}$,

(a) Bestem de værdier af a, for hvilke matrixligningen $AX = B$ har netop én løsning.

(b) Løs matrixligningen for $a = 0$.

(4) Find for enhver reel værdi af a samtlige løsninger til det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 4. \end{aligned}$$

Brug gerne Maple, men vær opmærksom på, at Maple ignorerer specialtilfælde. Disse må man altså sørge for at finde og behandle specielt.

(5) Givet matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Find den fuldstændige løsning til hver af de to matrixligningerne:

$$AX = B, \quad YA = B.$$

(LinearSolve i Maple kan bruges til en ligning $AX = B$ for en ubekendt matrix X).

1. Svar

(1) (a) Hvis $a = 0$ er rangen 2. Hvis $a = 1$ er rangen 3. Ellers er rangen 4.

(b) Hvis $a = 0 : X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix}$. Hvis $a = 1 : X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix}$.

Ellers $X = I$, den 4×4 enhedsmatrix.

(2) Alle $a \neq 1$. Mere præcist: $a = 1$: ingen løsning. $a = -6$: uendelige mange løsninger. Ellers netop én løsning.

(3) (a) Alle $a \neq 1$. (b) $(-3, 1, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$.

(4) Hvis $a = 1$ eller $a = -2$ er der ingen løsning. Ellers er løsningen

$$\frac{1}{(a-1)(a+2)}(a-5\,,\,2a-3\,,\,4a+1)$$

.

(5) Løesningerne er $\begin{bmatrix} 2-2r & -2-2s & 2-2t \\ 1-r & -3-s & -1-t \\ r & s & t \end{bmatrix}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$, og $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.