DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 3

(1) I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet er fire planer α_1, α_2, α_3 og α_4 givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} \alpha_1: \quad 7x + y - 4z &= 2, \\ \alpha_2: \quad 2x - 4y + 6z &= 2. \\ \alpha_3: \quad x + y - 2z &= 0, \\ \alpha_4: \quad 2x - y + z &= 1, \end{aligned}$$

Vis, at de fire planer har en ret linie ℓ tilfælles, og find en parameterfremstilling for ℓ.

(2) Find den fuldstændige løsning til følgende ligningssystem med 5 ubenkendte:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

(3) (Se afsnit *2.9 Løsningsmængders lineære struktur*): Det er givet at $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 0, 0, 0, -2)$ er en løsning til det inhomogene ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= b_1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= b_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= b_3. \end{aligned}$$

Find den fuldstændige løsning til systemet.

(4) Bestem tallene a_0, a_1, a_2, og a_3 således, at kurven med ligningen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

går gennem de fire punkter med koordinaterne

$$(-2, 16), \quad (-1, 0), \quad (1, -8), \quad (3, -24).$$

(5) Bestem tallene a_0, a_1 og a_2, således, at parablen med ligningen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

går gennem punkterne med koordinaterne $(2, -3)$, $(9, 4)$, og $(t, 4)$. For enhver værdi af t ønskes antallet af løsninger angivet. (Vink: Find først et lineært ligningssystem).

1. Svar

(1) Linjen er givet (parametrisk) ved: $(1/3, -1/3, 0) + t(1/3, 5/3, 1)$.

(2) $t_1(-5, 2, 0, 1, 2) + t_2(0, 1, 1, 0, 0)$.

(3) $(3, 0, 0, 0, -2) + t_1(-5, 2, 0, 1, 2) + t_2(0, 1, 1, 0, 0)$

(4) Totalmatricen: $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -24 \end{bmatrix}$. Svar til opgave: $(-6, -3, 2, -1)$.

(5) Hvis $t \neq 9$ og $t \neq 2$, er løsningen $(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{t-2}(-5t - 8, t + 9, -1)$.
Hvis $t = 9$, er der unendelige mange løsninger $(-5 + 18s, 1 - 11s, s)$.
Hvis $t = 2$ er der ingen løsning.