DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 2

(1) Opskriv Taylors formel for $n = 2$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$ for funktionen $f(x) = \text{Arctan}(2x)$.

(2) Giv en vurdering af udtrykket

$$\left|\frac{\xi}{1+\xi^2}\right| x^2,$$

hvor ξ ligger mellem 0 og x, når
(a) $|x| \leq \frac{1}{2}$,
(b) $|x| \leq 2$.

(3) Lad $P_1(x)$ betegne Taylorpolynomiet af orden 1 med udviklingspunkt $x_0 = 0$ for $f(x) = \text{Arctan}(2x)$. Giv en vurdering af restleddet $R_1(x)$ når
(a) $|x| \leq \frac{1}{10}$,
(b) $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(4) Middelværdisætningen (som er faktisk Taylors formel for $n = 0$) siger som bekendt, at der for en funktion $f(x)$ findes et tal ξ mellem x_0 og x således, at

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(\xi).$$

Find et sådant ξ for
(a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = \pi$,
(b) $f(x) = x^n, (n > 1)$, $x_0 = 0$, $x = 1$.

(5) Find Taylorpolynomiet $P_n(x)$ for hver af følgende funktioner i det angivne punkt x_0 og med det angivne n. Giv en vurdering af restleddet for $|x| < 0.2$:
(a) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0, n = 2$.
(b) $f(x) = \ln(\cos(x))$, $x_0 = 0, n = 3$.
(c) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0, n = 4$.

1. Svar

(1) $\mathrm{Arctan}(2x) = 2x + R_{2,0}(x)$ eller $\mathrm{Arctan}(2x) = 2x + x^2\varepsilon_f(x)$.

(2) (a) $|\xi/(1+\xi^2)|x^2 \leq 1/8$. (b) $|\xi/(1+\xi^2)|x^2 \leq 8$.

(3) Vi har $|R_1(x)| = \frac{16|\xi|}{|1+4\xi^2|^2}\frac{x^2}{2}$. Svar: (a) $|R_1(x)| \leq 1/125$. (b) $|R_1(x)| \leq 1$.

(4) (a) $\xi = \pi/2$. (b) $\xi = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

(5) (a) $P_2(x) = x$. $R_2(x) = \frac{-2(2\cos^2(\xi)-3)}{\cos^4(\xi)}x^3/6$.
Vurdering: $R_2(x)| \leq \frac{(3-2\cos^2(0.2)(0.2)^3}{3\cos^4(0.2)}$. Mere enkelt kan man blot sige at $|2\cos^2(\xi) - 3| \leq 3$, og $\frac{1}{|\cos^4(\xi)|} \leq 2$ (for ξ mellem 0.2 og 0), og derfor har vi $|R_2(x)| \leq 2(0.2)^3$.

(b) $P_3(x) = -\frac{1}{2}x^2$. (c) $P_4(x) = x + \frac{1}{6}x^3$.