DESIGNMAT FORÅR 2012: FRIVILLIGE ØVELSER, UGE 1

At arbejde aktivt med øvelser er den bedste måde til at uddybe sin forståelse af emnet. Disse frivillige øvelser kan også bruges til som øvelser til eksamen. Vi diskuterer dem ikke i øvelserne, og man afleverer dem ikke. Men der står typisk svar på bagsiden.

(1) Angiv den maksimale definitionsmængder for funktionerne:
   (a) $f(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$,
   (b) $g(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$.
   (c) Vis på disse definitionsmængder, at $g(x) = x$, mens $f(x) \neq x$ i generelt.

(2) Differentier følgende funktioner:
   (a) $y = \ln 2x$.
   (b) $y = \cos\sqrt{x}$.
   (c) $y = x^2 e^x$.

(3) Skitser graferne for følgende funktioner:
   (a) $y = \cos(2x)$,
   (b) $y = \cos(-2x)$,
   (c) $y = (2x)^3$,
   (d) $y = (-2x)^3$.

(4) Bevis additionsformlerne $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ ved direkte udregning fra definitionen af cosh og sinh.

(5) Find de eksakte værdier af følgende udtryk:
   (a) $\text{Arccos}\frac{1}{2}$,
   (b) $\text{Arctan}(\tan\frac{2\pi}{3})$.

(6) Læs Definition 14.5 om epsilon-funktioner. Hvilke af følgende funktioner er epsilon-funktioner?

$$f(x) = \tan(x), \quad f(x) = \cos(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x \neq 0, \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

(7) Vis, at 0-udvidelsen $\hat{f}(x)$ af funktionen $f(x) = |x|/x$ ikke er en epsilon-funktion.

(8) Vis, at 0-udvidelsen $\hat{f}(x)$ af funktionen $f(x) = |x-3|/(x-3)$ ikke er kontinuert i $\mathbb{R}$.

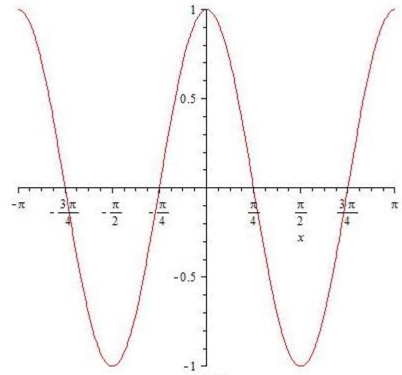
(9) (a) Vis, at $x^2 = c^2 + 2c(x-c) + (x-c)^2$, for alle $x, c \in \mathbb{R}$.
   (b) Brug Definition 14.12 til at vise følgende: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$.

1. Svar

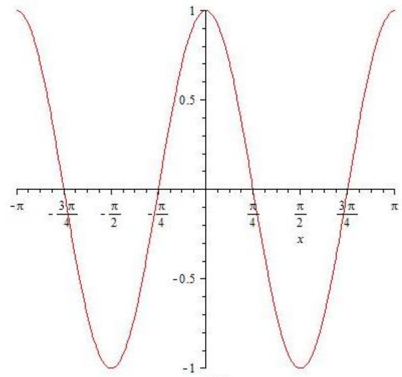
(1) (a) $Dm(f) = \mathbb{R}$. (b) $Dm(g) = [-1, 1]$.

(2) (a) $1/x$. (b) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$. (c) $2xe^x + x^2e^x$.

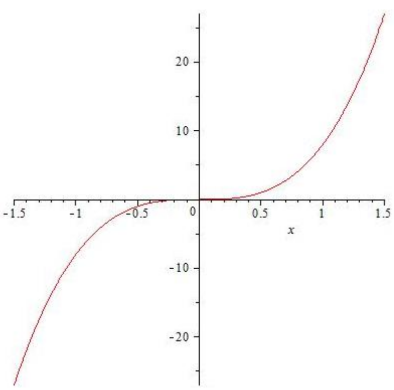
(3) Se figur.



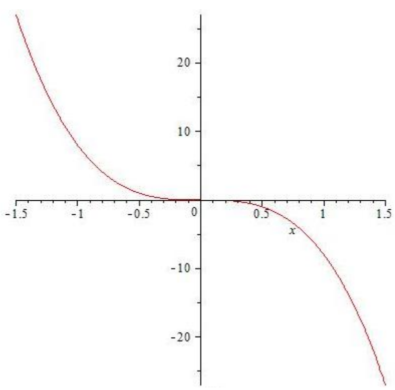
$y = \cos(2x)$



$y = \cos(-2x)$



$y = (2x)^3$



$y = (-2x)^3$

(4) En beregning.

(5) (a) $\pi/3$. (b) $-\pi/3$.

(6) Kun den første.

(7) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$. Kan ses ved at observere, at $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x > 0 \\ -1, & \text{for } x < 0 \end{cases}$.

(8) Argument ligner den til foregående problem.

(9) (a) Enkelt algebra. (b) Følger direkte fra Definition 14.12.