2. ORDEN SYSTEMER AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER III

PREBEN ALSHOLM

1. System af differentialligninger af 2. orden

1.1. Omskrivning af system af koblede 2. ordens differentialligninger til system af første orden.

- Betragt systemet

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + b_1 y_2' + a_0 y_1 + b_0 y_2 &= q_1(t) \\ y_2'' + c_1 y_1' + d_1 y_2' + c_0 y_1 + d_0 y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

- Sæt $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_1 x_3 - b_1 x_4 - a_0 x_1 - b_0 x_2 + q_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -c_1 x_3 - d_1 x_4 - c_0 x_1 - d_0 x_2 + q_2(t) \end{aligned}$$

  med koefficientmatrix på næste afsnit.
- Man kunne i stedet have valgt en anden organisering, f.eks. $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$.

1.2. Omskrivningen fortsat.

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_0 & -a_1 & -b_1 \\ -c_0 & -d_0 & -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$ fås i stedet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -d_0 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \\ 0 \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

1.3. Afkobling af specielt system af koblede 2. ordens differentialligninger.

- Betragt systemet

$$M\ddot{u} + Ku = F(t)$$

  hvor M og K er (konstante) $n \times n$-matricer, $F(t) = [F_1(t) \ F_2(t) \ \ldots \ F_n(t)]^T$ og $u = [u_1 \ u_2 \ \ldots \ u_n]^T$.
- Det specielle ved systemet er, at kun $\ddot{u}$ og u forekommer, ikke $\dot{u}$.

- Eksempel. Med $n = 2$ og $M =$diag(m_1, m_2) kan systemet skrives på formen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Det tilsvarende homogene system $M\ddot{u} + Ku = 0$ kan løses ved afkobling som for et system af første orden.

1.4. Afkobling I.

- Antag, at $M = B^2$, hvor B er en reel, symmetrisk og invertibel matrix. Antag, at også K er reel og symmetrisk.
- Så kan $M\ddot{u} + Ku = 0$ skrives $B\ddot{u} + ABu = 0$, hvor $A = B^{-1}KB^{-1}$.
- Da A er symmetrisk kan den diagonaliseres vha. en ortogonal matrix $Q = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$: $A = Q\Lambda Q^T$, hvor $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
- $B\ddot{u} + ABu = 0$ kan nu skrives

$$B\ddot{u} + Q\Lambda Q^T Bu = 0$$

- og dermed $Q^T B\ddot{u} + \Lambda Q^T Bu = 0$
- Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = Q^T Bu(t)$.
- Så fås

$$\ddot{y} + \Lambda y = 0$$

- Dette system er *afkoblet*:

$$\ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + \lambda_2 y_2 = 0, \quad \ldots \quad, \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = 0$$

1.5. Afkobling II.

- Antag, at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ alle er positive.
- Den fuldstændige løsning til $\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = 0$ er

$$y_i(t) = c_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + d_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) = A_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i} + \phi_i\right)$$

hvor amplituden $A_1 \geq 0$ og faseforskydningen $\phi_1 \in \mathbb{R}$.

- Den fuldstændige løsning til $M\ \ddot{u} + K\ u = 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= B^{-1}Qy(t) = B^{-1}[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n] \begin{bmatrix} A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) \\ A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) \\ \vdots \\ A_n \cos\left(t\sqrt{\lambda_n} + \phi_n\right) \end{bmatrix} \\ &= A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) B^{-1}v_1 + A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) B^{-1}v_2 \\ &\quad + \cdots + A_n \cos\left(t\sqrt{\lambda_n} + \phi_n\right) B^{-1}v_n \end{aligned}$$

1.6. Eksempel 1 (a).

- Betragt et system af to masser m_1 og m_2 og 3 fjedre med fjederkonstanterne k_1, k_2 og k_3:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 &= 0 \\ m_2\ddot{u}_2 - k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Her har vi $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ og $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$.
- M kan skrives $M = B^2$ med $B = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix}$.

- $A = B^{-1}KB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}(k_1+k_2) & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} \\ -\frac{k_2}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}} & \frac{1}{m_2}(k_2+k_3) \end{bmatrix}$
- Determinanten er $\det A = \frac{1}{m_1 m_2}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) > 0$.
- Sporet er $\mathrm{Spor}(A) = \frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} > 0$.
- Derfor er begge egenværdier positive.

1.7. **Eksempel 1 (b).**

- Betragt tilfældet $k_1 = k_2 = k_3 = k$ og $m_1 = m_2 = m$. Så har vi

$$A = B^{-1}KB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{bmatrix}$$

- Egenværdierne for A er $\frac{k}{m}$ og $\frac{3k}{m}$.
- Basis for egenrummet hørende til $\frac{k}{m}$ udgøres af $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
- Basis for egenrummet hørende til $\frac{3k}{m}$ udgøres af $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

1.8. **Eksempel 1 (c).**

- Den fuldstændige løsning til $M\ \ddot{u} + K\ u = 0$ er derfor

$$\begin{aligned} u(t) &= A_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_1} + \phi_1\right) B^{-1}v_1 + A_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda_2} + \phi_2\right) B^{-1}v_2 \\ &= c_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \phi_1\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}} + \phi_2\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- hvor $c_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}A_1, c_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}A_2$ og ϕ_1, ϕ_2 bestemmes ved begyndelsesbetingelserne.
- $c_2 = 0$ og $c_1 > 0$ svarer til, at de to masser svinger i fase (altså med fast indbyrdes afstand) med vinkelfrekvensen $\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- $c_1 = 0$ og $c_2 > 0$ svarer til, at de to masser svinger i modfase med vinkelfrekvensen $\sqrt{\frac{3k}{m}}$.

1.9. **Det generelle tilfælde.**

- Betragt nu systemet

$$M\ \ddot{u} + C\dot{u} + K\ u = F(t)$$

hvor M, C og K er (konstante) $n \times n$-matricer, $F(t) = [F_1(t)\ \ F_2(t)\ \ \ldots\ \ F_n(t)]^T$ og $u = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_n]^T$.
- Eksempel. Med $n = 2$ og $M = \mathrm{diag}(m_1, m_2)$, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2)$ kan systemet skrives på formen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Det tilsvarende homogene system $M\ \ddot{u} + C\dot{u} + K\ u = 0$ kan ikke generelt løses som ovenfor, hvor $C = 0$.
- Vi kan i stedet på standard vis omskrive til et system af $2n$ ligninger af første orden.
- Dette system løses så på sædvanlig måde.

1.10. Eksempel 2 (a).

- Betragt igen systemet af to masser m_1 og m_2 og 3 fjedre med fjederkonstanterne k_1, k_2 og k_3, men denne gang med dæmpninger proportionale med forskydningshastighederne:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + (k_1+k_2)\,u_1 - k_2u_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - k_2u_1 + (k_2+k_3)\,u_2 &= F_2(t) \end{aligned}$$

- Indfør nye variable $p_1 = m_1\dot{u}_1, p_2 = m_2\dot{u}_2$ og sæt $q = (u_1, u_2, p_1, p_2)$.
- Vores system kan nu skrives på formen $\dot{q} = Aq + \widetilde{F}(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -k_1-k_2 & k_2 & -\frac{c_1}{m_1} & 0 \\ k_2 & -k_2-k_3 & 0 & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

- og hvor $\widetilde{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_1(t) & F_2(t) \end{bmatrix}^T$.

1.11. Eksempel 2 (b).

- Karakterpolynomiet er $\lambda^4 + \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)\lambda^3 + \left(\frac{1}{m_1}(k_1+k_2) + \frac{1}{m_2}(k_2+k_3) + \frac{c_1c_2}{m_1m_2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{c_2}{m_1m_2}(k_1+k_2) + \frac{c_1}{m_1m_2}(k_2+k_3)\right)\lambda + \frac{1}{m_1m_2}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)$
- Routh-Hurwitz' kriterium: *Alle rødderne for polynomiet* $p = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ *har negativ realdel, hvis og kun hvis*

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{og} \quad a_4 > 0$$

- Kun 3×3-determinanten kræver arbejde, men kan også vises at være positiv (sålænge mindst én af c_1 og c_2 er positive).
- Fysisk set er resultatet klart, idet dæmpning af systemet må medføre, at udsvingene går mod nul, når $t \to \infty$.

1.12. Eksempel 2 (c).

- Med $k_1 = k_2 = k_3 = k$ og $m_1 = m_2 = m$ fås karakterpolynomiet til $\lambda^4 + \frac{1}{m}(c_1+c_2)\lambda^3 + \frac{1}{m^2}(4km + c_1c_2)\lambda^2 + \frac{2k}{m^2}(c_1+c_2)\lambda + \frac{3k^2}{m^2}$.
- Hvis også $c_1 = c_2$, så kan polynomiet skrives $\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{3k}{m}\right)\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)$.
- Hvis $c_1 = c_2$, så kan "omvejen" via førsteordenssystemet faktisk undgås.
- Hvis $c_1 \neq c_2$, så fylder rødderne i karakterpolynomiet i det symbolske tilfælde meget!
- Selv hvis $c_1 > 0$, men $c_2 = 0$ fylder rødderne i karakterpolynomiet enormt.