

Tangentielt kurveintegral, Rumintegral

Store Dag

Forelæsning: Emner fra MA2: 6.2 samt det tillægget som er vedhæftet efter denne ugeseddel (forberedelse kan tage udgangspunkt i 6.2 ex 1 og 2).

- Tangentielt kurveintegral
- Gradientintegralsætningen.
- Stamfunktionsbegrebet. Stamfunktionsbestemmelse (tillægget).
- Cirkulationssætningen.
- Stamfunktionssætningen.
- Anvendelser: Arbejde, potentialdifferens.
- Maple-kommandoerne `tangKurveInt` og `ScalarPotential`.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren og en første diskussion af forårets projektopgave: Klasselæreren bruger ca. 20 minutter til at informere om projektarbejdet, herunder om gruppedannelse og hvilke projekter der kan vælges blandt.

1. Opgave MA2 200 b. Håndregning.
2. Opgave MA2 202 a. Håndregning eller simuleret håndregning, tjek evt. `tangKurveInt`.
3. Opgave MA2 206 a . Bemærk, at kurven er en lukket kurve: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$! Se en illustration af vektorfeltet, taget på kurven, med `tangKurveInt(r,B,V,net,[3])`; og tjek med `tangKurveIntGo(r,B,V)`.
4. Opgave MA2 206 b . Efterses evt. resultatet med `tangKurveInt`, idet gradient-vektorfeltet først udregnes (dette gøres mest effektivt ved brug af D). Konstruer evt. en anden parametriseret kurve med de samme givne endepunkter, og bestem kurveintegralet af vektorfeltet langs denne anden kurve.
5. Læs eksemplet i tillægget til 6.2 .
6. Opgave MA2 207 h . Benyt fremgangsmåden i tillægget til 6.2 som er vedhæftet efter denne ugeseddel. Kontroller også resultatet med `ScalarPotential`.
7. Opgave MA2 210 .
8. Opgave MA2 207 j .
9. Opgave MA2 206 c .

Forelæsning: Emner fra MA2: 1.1 (Polære koordinater i rummet), 5.3 og 5.6 (forberedelse kan tage udgangspunkt i 5.3 ex 1).

- Rumligt volumen, rumintegral.
- Reduktion af rumintegral i retvinklede koordinater.
- Nye koordinatsystemer i rummet via transformation med vektorfunktion:
 $\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$,
hvor $u \in [a_1, b_1]$, $v \in [a_2, b_2]$, og $w \in [a_3, b_3]$.
- Koordinatkurver og koordinatflader.
- Jacobi-determinant og Jacobi-funktion. Transformationssætningen.
- Integration over semipolært afgrænsede områder i rummet.
- Integration over polært afgrænsede områder i rummet.
- Massemidtpunktsbestemmelse for vægtede rumlige områder.
- Inertimomenter for rumlige områder om givne akser.
- Opvarmning til rumInt, rumCm og rumIm fra Integrator8.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren:

1. Håndregning eller simuleret håndregning: Givet $\mathbf{r} : (u, v, w) \rightarrow \mathbb{R}^3$, hvor $(u, v, w) \in D_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Sæt $B = \mathbf{r}(D_3)$. Bestem Jacobi-funktionen og derefter henholdsvis volumenet af B og rumintegralet $\int_B (xyz)^2 d\Omega$ når $\mathbf{r}$ er bestemt ved henholdsvis:
 - (a) $\mathbf{r}(u, v, w) = (\frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv, w)$ og
 - (b) $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \cos(v\pi/2), u \sin(v\pi/2), w)$.
 - (c) Tjek resultaterne i (a) og (b) med rumInt, og diskutér de figurer der indgår i output.
2. Opgave MA2 170 a.
 - (a) Skitsér området og løs opgaven ved håndregning vha. en af reduktionssætningerne vedr. retvinklede koordinater.
 - (b) Bestem nu en parameterfremstilling med akseparallelt parameterområde for det givne rumlige område, og bestem igen det ønskede rumintegral vha. transformationssætningen.
 - (c) Tjek evt. med rumInt.

3. To områder A og B i rummet er givet ved hjælp af polære koordinater (r, θ, φ) som følger:

$$A = \{(r, \theta, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

$$B = \{(r, \theta, \varphi) \mid 2 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\} \quad .$$

- (a) Maple har ikke en kommando som umiddelbart kan plotte et parametriseret rumligt område. Du kan imidlertid plotte A , B , $A \cup B$, og $A \cap B$. vha. Integrator8 kommandoer (spørg din lærer om detaljer). Men det er også en rigtig god øvelse at benytte følgende strategi: Hvordan kan man ud fra en parametrisering af et rumligt område, danne parametriseringer af 6 flader som til sammen omslutter området?
- (b) Bestem volumenet af hvert af områderne A , B og $A \cap B$.
- (c) Find rumintegralerne

$$\int_A x d\Omega \quad , \quad \int_B x d\Omega \quad , \quad \int_{A \cap B} x d\Omega \quad .$$

Hjemmeopgavesæt 8 afleveres på Lille Dag i semesteruge 7

Appetitvækker til uge 7 (Lille Dag)

En (uendelig lang) omdrejnings-flade er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, (2 + \sin(4u)) \cos(v)/u, (2 + \sin(4u)) \sin(v)/u) ,$$

hvor $u \in [\frac{\pi}{2}, \infty[$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Har fladen mon uendeligt eller endeligt overfladeareal? Hvad med volumenet af det tilsvarende massive omdrejningslegeme - er det endeligt eller uendeligt? Hvor ligger massemidtpunktet? Kan massemidtpunktet "ligge i uendelig" hvis massen er endelig?

