

Planintegraler. Kurveintegraler

Store Dag

Bemærkning: Angående dagens og de følgende emner i integralregning: Se også den alternative fremstilling i noterne **Integration i flere variable** på kursets hjemmeside.

Forelæsning: Emner fra MA2: 1.1 (polære koordinater i planen), 5.1, 5.2, 5.6 (forberedelse kan tage udgangspunkt i 5.2 ex 1 og 8).

- Alment om integration i flere variable. Plant areal, planintegral.
- Reduktion af planintegral i retvinklede koordinater.
- Nye koordinatsystemer i planen via transformation med vektorfunktioner:
 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, hvor $u \in [a_1, b_1]$ og $v \in [a_2, b_2]$.
- Koordinatkurver, lokalt approksimerende parallelogrammer.
- Jacobi-determinant, Jacobi-funktion og transformationssætningen.
- Integration over polært afgrænsede områder.
- Massemidtpunktsbestemmelse for vægtede plane områder.
- Opvarmning til kommandoerne `planInt` og `planCm` fra pakken `Integrator8`.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren, hvor du møder din hjælpelærer kl. 12:00 og din klasselærer kl. 13:30:

1. Regn MA2 150 e i hånden. Tjek at resultatet ikke afhænger af om der først integreres mht. x eller y .
2. Regn opgave MA2 150 b. Brug kun Maple til at finde stamfunktioner. Tjek resultatet med `planInt` fra `Integrator8`.
3. Opgave MA2 150 l .
 - (a) Regn opgaven vha. reduktion i retvinklede koordinater: benyt håndregning eller simuleret håndregning idet området B først skitseres.
 - (b) Begrund at B også kan angives på følgende form:
 $B = \{(x, y) \mid x = u, y = v(1 - u), \text{ hvor } u \in [0, 1] \text{ og } v \in [0, 1]\}$.
 - (c) Bestem den Jacobi-funktion som svarer til denne parametrisering og udnyt dette til igen at bestemme integralet.
4. Opgave MA2 150 a .
 - (a) Skitsér det plane område og bestem derefter en parametrisering af området svarerende til et rektangulært parameterområde. Find den Jacobi-funktion som svarer til den valgte parametrisering.
 - (b) Indtast med denne parametrisering opgaven i `planInt`, og diskutér de figurer der fremkommer herunder deres sammenhæng med Jacobi-funktionen.
5. Opgave MA2 151 i .

6. Benyt simuleret håndregning eller `planInt` til at løse følgende to opgaver for hver af de områder B , der betragtes i opgaverne MA2 150 l, 150 a, og 151 i :
- (a) Bestem massen og massemidtpunktet af B når massetætheden er konstant $f(x,y) = 1$.
- (b) Bestem massen og massemidtpunktet af B når massetætheden er $f(x,y) = x^2$.
7. Opgave MA2 151 j . Begrund, at det plane område i opgaven kan angives på følgende form:
 $B = \{(x,y) \mid x = au \cos^2(v), y = au \cos(v) \sin(v), \text{ hvor } u \in [0, 1] \text{ og } v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$.
Brug Maple til at plotte B i det tilfælde hvor $a = 1$. Find dernæst det ønskede planintegral for enhver værdi af a .

Lille Dag

Forelæsning: Emner fra MA2: 2.2, 3.6, 5.4 (forberedelse kan tage udgangspunkt i 5.4 ex 6).

- Parameterfremstilling for en kurve. Kurvetangent.
- Indførelse og reduktion af kurveintegralet. Jacobi-funktionen.
- Kurvelængde og naturlig parameterfremstilling.
- Massemidtpunktsbestemmelse for vægtede kurver i rummet.
- Kommandoen `spacecurve` og opvarmning til `Integrator8` -kommandoerne `kurveInt` og `kurveCm`.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren:

1. MA2 75 c. Plot kurven sammen med såvel tangentvektoren som tangentlinjen i det betragtede punkt.
2. Regn MA2 185 f i hånden. Bestem først kurvens længde og dernæst det ønskede kurveintegral.
3. Find med Maple den Jacobi-funktion der svarer til den parametriserede kurve i MA2 185 i og MA2 185 j, og bestem derefter de ønskede kurveintegraler.
4. MA2 187 b .

- (a) Skitsér kurven og begrund at den repræsenteres af følgende parameterfremstilling:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\exp(t) \cos(t), \exp(t) \sin(t)) \quad t \in [0, 4] \quad .$$

- (b) Bestem den hertil hørende Jacobi-funktion og derefter det ønskede kurveintegral.

5. En kurve $\mathcal{K}$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t \cos(t), t \sin(t), t) \quad t \in [0, \pi] \quad .$$

Undersøg $\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) ds$ vha. `kurveInt` og `kurveIntApprox` og diskutér betydningen af de fremkomne figurer.

6. MA2 188 b . Find evt. buelængden s som funktion af parameteren t vha. `kurveIntGo` .

7. MA2 186 c . Brug evt. (eller tjek med) kurveInt idet det først begrundes at kurven kan repræsenteres ved

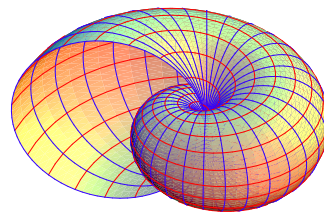
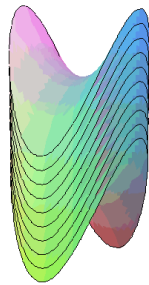
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, \ln(t), 0) \quad t \in [1, 2\sqrt{2}] \quad .$$

8. MA2 502 .

9. MA2 475 .

Appetitvækker til semesteruge 5

Hvad vejer 10 cylindrisk afskårne chips med formen $z = x^2 - y^2$? Hvor meget materiale bruger sneglen til sit hus?



Hjemmeopgavesæt 7 afleveres på Lille Dag i semesteruge 5
--