

Taylors formel

Store Dag

Forelæsning: Emner fra MA1: 6.1, 6.2 (forberedelse kan tage udgangspunkt i MA1, ex 6.1, 6.4, 6.5).

- Hvad er ideen med Taylors formel?
- Definition af differentiability (linearisering), Rolles sætning og middelværdisætningen.
- Taylors formel til første orden (sætning 6.1, linearisering) med bevis.
- Taylors formel og Taylors grænseformel for vilkårligt n .
- Anvendelse: Kritiske grænseværdier (" $\frac{0}{0}$ "). Logaritme-, potens- og eksponentialfunktion for $x \rightarrow \infty$.
- Maple-Demo 18, herunder kommandoerne `taylor(f(x), x=0, n);` og `mtaylor(f(x), x=0, n);`

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren, hvor du møder din hjælpelærer kl. 12:00 og din klasselærer kl. 13:30:

1. Brug Maple til at finde Taylorpolynomiet af orden 9, $P_9(x)$, med udviklingspunkt $x_0 = 0$ for funktionen $\sin(x)$. Tegn i samme koordinatsystem $\sin(x)$ og $P_9(x)$. Hvor langt ud til siden kan man få Taylorpolynomiet til at følge funktionen? (Eksperimentér med polynomiets orden).
2. Find for hver af de følgende funktioner deres Taylorpolynomier af første og anden orden med udviklingspunkt $x_0 = 0$ (håndregning eller simuleret håndregning), og plot hver af funktionerne sammen med de to fundne Taylorpolynomier:
 e^x , $\cos(x)$, $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\sqrt{1-x^2}$, $e^{\sin(x)}$, $\cosh(x)$.
3. Bestem Taylorpolynomierne $P_5(x)$ og $P_6(x)$ af ordenen henholdsvis 5 og 6 for funktionen $f(x) = 1/(1+x^2)$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$. Tegn $f(x)$, $P_5(x)$ og $P_6(x)$ i samme koordinatsystem. Hvilke værdier kan Taylorpolynomierne antage i henholdsvis -1 og 1 ? (Eksperimentér med polynomiernes orden). Hvor langt ud til siden kan man få grafen for et Taylorpolynomium for f til at følges med grafen for f ? Fås andre svar, hvis man benytter udviklingspunktet $x_0 = 1$?
4. Find Taylorpolynomiet $P_4(x)$ for funktionen $\sqrt{1+2x^2}$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$. Tegn i samme koordinatsystem graferne for $f(x)$, for $P_4(x)$ og for $f(x) - P_4(x)$. Aflæs på figuren den største værdi, som den numeriske værdi af restleddet kan antage i intervallet $[-1, 1]$. Men restleddet kan også vurderes efter standardmetoden: Find den numerisk største værdi af $f^{(5)}(\xi)/5!$ i intervallet $[-1, 1]$. Nu kan du vurdere restleddet via $|R_4(x)| \leq \max|f^{(5)}(\xi)/5!| \cdot \max|x|^5 \leq \dots$ Er denne vurdering i overensstemmelse med den tidligere aflæste største numeriske værdi af restleddet?

5. Læs eksempel 6.11 i MA1. Regn MA1: opgave 622(a) ved hjælp af Maple på tilsvarende måde: Lav en Taylorudvikling af orden 3 af tælleren og nævneren. Aflæs nu efter forkortelse med x^2 hvad grænseværdien bliver. Overvej, om udviklinger af lavere orden er tilstrækkelige. Spørg derefter Maple direkte via kommandoen $\text{limit}(f(x)/g(x), x=0)$; hvad grænseværdien bliver. Når nu Maple er så god til at udregne grænseværdier direkte, hvorfor er så en Taylorudvikling af tæller og nævner alligevel interessant?
6. MA1 623(a). Håndregning og Maple-kontrol.
7. MA1 638. Formulér en matematisk sætning der præcist formulerer indholdet i besvarelsen af spørgsmål 2.
8. MA1 628. Håndregning og Maple-kontrol.
9. MA1 H117.

Lille Dag

Forelæsning: Emner fra MA1: 6.1, 6.2 og fra MA2: 3.4, 4.4 (side 112–113) (forberedelse kan tage udgangspunkt i MA2, 3.1 ex 10 og 3.4 ex 1).

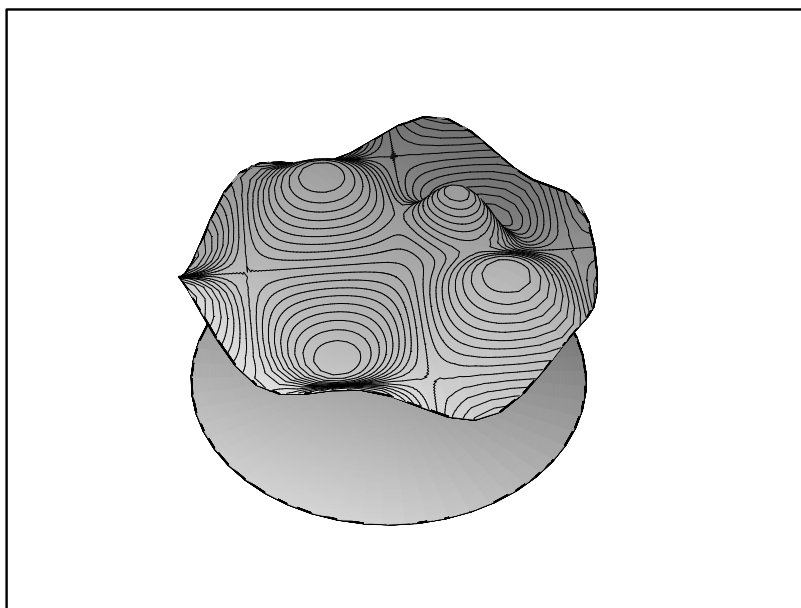
- Kort kontant repetition af differentiability for funktioner af flere variable (især forskel til differentiability for funktioner af én variabel), Nabla, partielle afledede af første og højere orden, retningsafledede, tangentplan.
- Taylors grænseformel for $f(x,y)$ og udviklingsorden $n = 2$.
- Indledende om maksimum og minimum - fortsættes i semesteruge 3.
- Maple-Demo 19, herunder kommandoerne unapply og $\text{mtaylor}(f(x,y), [x=x_0, y=y_0], n)$.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren:

1. En funktion f opfylder $f(2) = 1$, $f'(2) = 1$ og $P_2(1) = 1$. Bestem regneforskriften for $P_2(x)$.
2. MA1 624 (a) (b) .
3. MA1 634 (a) (b) .
4. MA2 72 (b) .
5. MA2 73 (a).
6. MA2 70 .
7. MA2 74.

Appetitvækker til næste uge

Hvor er det højeste punkt?



Hjemmeopgaver

Du er nu rustet til at begynde på de to første af opgaverne i hjemmeopgavesæt 6, som kan ses på kursets hjemmeside.