

Hjemmeopgavesæt 8:

Afleveres:

Skema A: Lille Dag 18. marts.

Skema B og Skema C: Lille Dag 19. marts.

1. En plan parameterkurve C er givet ved $\mathbf{r}(t) = (2 - \cos(t), 1 + t - \sin(t))$, $t \in [0; 2\pi]$.
 - (a) Plot C , og markér de punkter på den der svarer til $t = \frac{\pi}{4} \cdot p$, hvor $p \in \{0, 1, 2 \dots 8\}$.
 - (b) Vis at Jacobi-funktionen for C er lig med $2 \sin(\frac{t}{2})$, og bestem længden af C .
 - (c) Plot C sammen med punkter der deler den i otte lige lange stykker (Vink: Bestem først vha. Maple en naturlig parameterfremstilling for C).

2. Et område B i (x, y) -planen er givet ved $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Endvidere er en flade $\mathcal{F}$ givet ved $Z(x, y) = xy$ for $(x, y) \in B$. Endelig er en massetæthedsfunktion f givet ved $f(x, y, z) = x^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.
 - (a) Bestem en parameterfremstilling for B .
 - (b) Bestem en parameterfremstilling for $\mathcal{F}$.
 - (c) Bestem massen af $\mathcal{F}$.

3. I rummet er der givet et strømningsvektorfelt $\mathbf{V}$ bestående af parallelle enhedsvektorer, men vi kender ikke vektorfeltets retning som er tilfældig. I feltet er der placeret en lukket flade som accepterer *indstrømning*, men ikke *udstrømning*. Indstrømningen betegner vi med B^+ , som vi mere præcist definerer som vektorfeltets flux gennem den del af fladen som opfylder at skalarproduktet af vektorfeltet og fladens indadgående normalvektor er positivt. Opgaven handler om, hvordan *middelværdien* af B^+ (den mest "sandsynlige" værdi) afhænger af fladens areal.
 - (a) Gør rede for at man med rimelighed kan modellere vektorfeltet ved
$$\mathbf{V}(x, y, z) = (\cos(s) \cdot \sin(t), \sin(s) \cdot \sin(t), \cos(t))$$
 hvor $s \in [0, 2\pi]$ og $t \in [0, \pi]$.
 - (b) Lad C være en almindelig lukket omdrejningscylinder med bundradius=topradius= a og højde h . Bestem $B^+(s, t)$ for C ved et vilkårligt valg af s og t .
 - (c) Ved indstrømningsmassen B_{total}^+ forstås den samlede virkning af B^+ , når den lukkede flade udsættes for strømning fra alle retninger med lige stor vægt. Bestem B_{total}^+ for C .
 - (d) Middelværdien af B^+ for C kan nu bestemmes som den konstante værdi k for B^+ som en lukket flade med konstant B^+ må have for at opnå samme indstrømningsmasse som C . Bestem k .
 - (e) Bestem for enhver værdi af a og h forholdet mellem middelværdien af B^+ for C og arealet af C .

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du kan

- designe passende parametriseringer af kurver og enkle flader
- redegøre for Jacobi-funktionens betydning
- bestemme kurve- og fladeintegraler
- bruge integralregning ved bestemmelse flux
- benytte geometrisk intuition og passende Maple-plots i dine redegørelser
- skrive sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer