

Hjemmeopgavesæt 6:

Afleveres på Lille Dag i semesteruge 3 (= kalenderuge 7).

1. En kontinuert funktion som $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x^2)$ har netop én stamfunktion $F(x)$ hvis graf går gennem $(0, 0)$, og man kunne måske umiddelbart tro at den ville være simpel at finde. Men det er ikke tilfældet! Stamfunktionen kan slet ikke udtrykkes vha. sædvanlige elementære funktionstegn, og derfor er den blevet opkaldt efter den person som først studerede den nøje.
 - (a) Find den nævnte stamfunktion vha. Maple, kontrollér at funktionen virkelig er den ønskede stamfunktion til $f(x)$. Hvem er den person som stamfunktionen er opkaldt efter?
 - (b) Da $F(x)$ ikke kan udtrykkes vha. kendte elementære funktioner, kan vi i stedet studere dens egenskaber vha. dens Taylorudvikling. Bestem vha. elementære udregninger Taylorudviklingen af orden 5 med udviklingspunkt $x_0 = 0$ for $F(x)$, og det samme for funktionen $g(x) = x^3 \cdot (1 - \cos(x))$. Tjek resultaterne med kommandoen "taylor".
 - (c) Bestem grænseværdien af $\frac{x - F(x)}{g(x)}$ når $x \rightarrow 0$ ved at benytte de i (b) fundne Taylorudviklinger.
 - (d) Kontroller resultatet med Maple-kommandoen "limit".
 - (e) Illustrér med passende Maple plots.
 - (f) Hvilken orden for et taylorpolynomium med udviklingspunkt i $x_0 = 2\pi$ er den mindst mulige for henholdsvis $F(x)$ og $g(x)$, når det ønskes at taylorpolynomierne skal være forskellige fra 0-funktionen? Undersøg $\frac{F(x)}{g(x)}$ når $x \rightarrow 2\pi$
2. Find en passende approksimation til $\cos(1)$ ved at benytte de fem første fra 0 forskellige led i Taylors formel. Vurdér restleddet.
3. En 4×4 -matrix $\underline{\underline{A}}$ er givet ved:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Det oplyses at $\underline{\underline{A}}$ har to egenverdier, $\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = -1$.

- (a) Bestem en ortonormal basis for egenvektorrummet E_7 .
- (b) Bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{Q}}$ så $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}}$ er en diagonalmatrix, og angiv $\underline{\underline{\Lambda}}$.

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du

- kan opstille Taylorpolynomier og Taylorudviklinger ud fra relevante formler
- kan bruge Taylorudviklinger til at bestemme grænseovergange
- kan vurdere vha. restleddet i Taylors formel
- kan bruge Gram-Schmidt ortogonalisering til at finde en ortonormal basis for et vektorrum
- kan udnytte at egenrummene til en symmetrisk matrix er ortogonale
- vha. det nævnte kan finde en ortogonal matrix $\underline{\underline{Q}}$ der diagonaliserer en symmetrisk matrix $\underline{\underline{A}}$
- skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer