

Hjemmeopgavesæt 10:

Afleveres:

Skema A: Torsdag den 8. april.

Skema B og C: Fredag den 9. april.

1. Et rumligt område Ω er givet ved $x^2 + y^2 \leq a^2$ og $0 \leq y$ og $0 \leq z \leq b$. Bestem fluxen af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x^2 - 2xz, 5yz, 2ye^x)$ ud gennem overfladen af Ω orienteret med udadrettet enhedsnormalvektor.
2. I rummet betragtes trekanten T med vinkelspidserne $A(0, 0, 3)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 0, 0)$ og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (z, x, y)$.
 - (a) Bestem en parametrisering af T .
 - (b) Vælg og markér en orientering af den lukkede kurve $\mathcal{K}$ som udgøres af trekantens sider, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}$.
3. Betragt vektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (2x + 3y, 2y + 3x, -4z) \text{ for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

og funktionen

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy \text{ for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Find konstanter a, b, c og d , så $\mathbf{V} = \nabla F$.
- (b) Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs den højre halvdel af enhedscirklen i (y, z) -planen med centrum i $(0, 1, 1)$, idet du selv vælger kurvens orientering.
- (c) Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{W}(x, y, z) = (2yz + xz - x^2, -2xz - yz + y^2, y^2 - x^2 + z^2) \text{ for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

er et vektorpotential for $\mathbf{V}$.

- (d) Lad r være en positiv konstant, og lad $\mathcal{F}$ være en orienteret flad givet ved

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ for } z \geq 0$$

hvor du selv vælger fladens orientering. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ gennem $\mathcal{F}$.

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt at du

- kan bruge Gradient-integralsætningen
- har tjek på Gauss' sætning og Stokes' sætning
- skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer