

Funktioner af flere variable (II).

Store Dag

Forelæsning: Emner fra *Matematisk Analyse 2*, kapitel 3 (forberedelse kan tage udgangspunkt i eks. 3 i afsnit 3.2) :

- Kurver i planen på parameterform $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.
- Kædereglen for tilfældet $h(t) = g(x(t), y(t))$.
- Retningsafledet.
- Gradientvektorerne ER ortogonale på niveaukurverne!
- Maple-Demo 17.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren, hvor du møder din hjælpelærer kl. 12:00 og din klasselærer kl. 13:30.

Løs og diskutér følgende opgaver:

1. Opgave MA2 55 (a, b, e, f). Check med Maple
2. Opgave MA2 50 (a, d). Brug Maple til at tegne (passende udsnit af) graferne (i et (x, y, z) -koordinatsystem) for funktionerne og til at vise de tilhørende gradient-vektorfelter og niveaukurver (i (x, y) -koordinatsystemet). Kan man ud fra de to gradient-plot afgøre om funktionerne vokser eller aftager i punktet $P = (0, 2)$ i den retning som er bestemt af vektoren $\mathbf{v} = (-1, -1)$. Bestem for hver af de to funktioner den retningsafledede af hver af de to funktioner i P i den retning som er bestemt af vektoren $\mathbf{v}$.
3. Læs og forstå side 65 i (MA2) bogen – især bemærkningen: "Man kan altså karakterisere gradienten som en vektor, der går i den retning, hvori funktionen f vokser kraftigst."
4. Vi forestiller os, at der i et ellers fladt landskab ligger et bjerg, der har form som grafen for funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ over det rektangulære område i (x, y) -planen, som er afgrænset ved $-1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Uden for dette område er landområdet i niveau med havoverfladen, altså givet ved $f(x, y) = 0$. (På randen af området forestiller vi os, at bjerget har helt lodrette sider.)
 - (a) Tegn et plot af "bjerg-grafen" ved brug af `plot3d` med det ovenfor givne definitionsområde.
 - (b) Hvad er koordinaterne for det højeste punkt, B, på bjerget? (Aflæs først på grafen og argumenter dernæst præcist for dit svar.)
 - (c) Vis, at det rette linjestykke med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (x, y, z) = (0, -2, 0) + t(1, 1, 4), \quad t \in [0; 2]$$

ligger helt indeholdt i bjerg-fladen og forbinder punktet $A = (0, -2, 0)$ (ved havoverfladen) med det ovenfor fundne højest beliggende punkt B. NB: Den korteste sti på bjerget fra bjerg-punktet $A = (0, -2, 0)$ (ved havoverfladen) til bjergets toppunkt B er derfor denne rette linje. Hvorfor det?

- (d) Benyt contourplot til at tegne et system af niveau-kurver for funktionen f i det rektangulære bjerg-område i (x, y) -koordinatsystemet, hvorover bjerg-fladen er defineret. Dette er da et højde-kort over bjerget. Aftegn dette højde-kort her med (for eksempel 7) niveau-kurver:
- (e) Indtegn dernæst på dit højdekort de to punkter, der svarer til bjerg-punkterne A og B samt den kurve i kortet, som svarer til den korteste sti på bjerget fra A til B , som vi fandt ovenfor.
- (f) Beregn gradienten af funktionen f i eksempelvis 3 punkter langs den ovenfor fundne og tegnede kurve i kortet, og indtegn også de 3 gradient-vektorer på din figur ovenfor.
- (g) Vis, at der er ét og kun ét punkt på kurven hvor gradienten af f peger i samme retning som kurven (benyt eventuelt kommandoen `gradplot`).

Er det ikke i direkte modstrid med: "Man kan altså karakterisere gradienten som en vektor, der går i den retning, hvori f vokser kraftigst, ..." (citater fra MA2 side 68)?

5. Opgave MA2 57.

6. Besvar spørgsmålene i appetitvækkeren til denne uge.

7. Se det afsluttende jule-worksheet: `NisseiNorge.mw` (fra Maple-menupunktet på hjemmesiden).

Lille Dag

Forelæsning: Repetition og repetitions-opgaver. Gennemgang af 2-timersprøven fra 8. december 2008.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren: (Ved denne fællestimes begyndelse afleveres hjemmeopgavesæt 5. Disse opgaver leveres rettede tilbage på Store Dag i semesteruge F01.)

1. Regn 2-timersprøven fra 10. december 2007.

2. Et mini-øvelsessæt:

- (a) Det oplyses, at $x(t) = t^3$ er løsning til følgende differentialligning, hvor $q(t)$ betegner en kontinuert funktion, som er defineret for alle $t \in \mathbb{R}$:

$$(*) \quad x''(t) - x'(t) - 2x(t) = q(t) - t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Find $q(t)$ og bestem samtlige løsninger til differentialligningen (*).

- (b) Find rødderne i polynomiet

$$z^2 + 2z + 5.$$

Angiv rødderne både på formen $a + ib$ og på formen r_v .

- (c) En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har følgende matrix med hensyn til en given basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ i $\mathbb{R}^2$ og en given basis $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Find matricen for f med hensyn til basen $(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_1 - \underline{a}_2)$ i $\mathbb{R}^2$ og den samme basis som før, $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$ i $\mathbb{R}^3$.

3. Yderligere repetitionsopgaver (med løsninger) findes på kursets hjemmeside:
<http://www.mat.dtu.dk/education/01005/>

2-timers prøven

Prøven finder sted mandag den 7. december, 2009.

Appetitvækker til næste semester

Hvordan kan denne knude-tube mon repræsenteres matematisk, og hvordan finder vi rumfanget af det indre af tuben og arealet af overfladen?:

