

Egenværdiproblemet

Store Dag

Forelæsning: Emner fra LA 7.1, 7.2 (forberedelse kan tage udgangspunkt i eks. 7.2, 7.3 og 7.5):

- Definition 7.1 af egenværdi, egenvektor og egenløsning for en lineær afbildning.
- Matrixegenværdiproblemet og dets løsning.
- Definition af algebraisk og geometrisk multiplicitet og deres sammenhæng.
- Sætningerne 7.8, 7.9, 7.10.
- Første indtryk af diagonalisering: problemstilling, sætning 7.6.
- Maple-Demo 09, herunder kommandoerne: Eigenvalues, Eigenvectors.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren, hvor du møder din hjælpelærer kl. 12:00 og din klasselærer kl. 13:30.

1. Geometer-øvelse i egenværdi-problemet. Hent teksten (pdf) og det tilhørende Geometer-worksheet (gps) i mappen "Problem3" i Campusnet fildelingen under Matematik 1.

2. (a) En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er mht. den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^3$ givet ved matricen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Find (gerne ved hjælp af Maple) egenværdierne for f og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter.

- (b) Givet matricen $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Find (gerne ved hjælp af Maple) egenværdierne for $\underline{\underline{B}}$ og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter.

- (c) Findes der en basis for $\mathbb{R}^3$ således at afbildningsmatricen for f mht. denne basis er en diagonalmatrix? Hvad står der i givet fald i diagonalen?

- (d) Samme spørgsmål for den lineære afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der har $\underline{\underline{B}}$ som afbildningsmatrix mht. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$.

3. Løs opgaverne LA 7.1, spm. 2) og 4).

4. Et par spørgsmål om lidt mere end blot notation :

- (a) Opskriv egenværdiproblemet for en $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$. Hvorfor kan egenvektoren $\underline{\underline{v}}$ ikke bortforkortes?
- (b) Betragt (7.9a) og (7.9b). Enten skal der være to streger under 0 i (7.9a) eller de to streger under 0 i (7.9b) fjernes. Eller hvad?

5. Givet matricen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, dvs. $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$.

(Man siger da, at matricen $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk.)

Vis, at $\underline{\underline{A}}$'s egenværdier begge er reelle.

Er dette ikke i modstrid med resultatet af opgave 1?

6. Regn LA 7.9.

7. Antag, at λ_1 og λ_2 er to forskellige egenværdier for en matrix $\underline{\underline{A}}$, dvs. der findes $\underline{\underline{v}}_1 \neq \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{v}}_2 \neq \underline{\underline{0}}$ så

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{v}}_1 = \lambda_1 \underline{\underline{v}}_1, \quad \underline{\underline{A}}\underline{\underline{v}}_2 = \lambda_2 \underline{\underline{v}}_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (1)$$

Vis da, at egenvektorerne $\underline{\underline{v}}_1$ og $\underline{\underline{v}}_2$ er lineært uafhængige.

En mulig fremgangsmåde er: Antag, at $\underline{\underline{v}}_1$ og $\underline{\underline{v}}_2$ er lineært afhængige, dvs. der findes et tal $k \neq 0$, således at $\underline{\underline{v}}_2 = k\underline{\underline{v}}_1$. Multiplicer denne ligning dels med λ_2 og dels med $\underline{\underline{A}}$ fra venstre og benyt (1). Derved får du to ligninger, som viser en modstrid. Hvad følger heraf?

Læs sætning 7.3 og 7.4. Hvad har de med vores problem at gøre?

Lille Dag

Forelæsning: Emner fra LA 6.3 og 7.3 (forberedelse kan tage udgangspunkt i eks. 7.9) :

- Definition 6.12 af similartransformation, sætning 6.13 og sætning 6.14, sætning 7.11.
- Diagonalisering, sætningerne 7.12, 7.13, relation til sætning 7.6.
- Maple-Demo 10.

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren:

1. Her er en del af en Maple session:

```
> A:=< <16|-13|-2>,<18|-15|-2>,<-24|24|4> >:
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[4, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[3, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[-2, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right]$$

- (a) Opskriv matricen $\underline{\underline{A}}$ i sædvanlig notation.
- (b) Angiv egenværdier og samtlige egenvektorer for den lineære afbildning $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der mht. den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen $\underline{\underline{A}}$.
- (c) Find en basis for $\mathbb{R}^3$, $(\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3)$, bestående af egenvektorer for f .
- (d) Find afbildningsmatricen for f mht. basen $(\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3)$.
- (e) Angiv en regulær matrix $\underline{\underline{V}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$, således at $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}}$.

2. Hvilke af funktionerne $1, x, x^2, e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)$ er egenvektorer for den lineære afbildning ved hvilken
- (a) en differentiabel funktion afbildes på sin differentialkvotient,
 - (b) en to gange differentiabel funktion afbildes på sin 2. afledede.
3. Regn LA 7.20 og LA 7.10.
4. Regn LA 7.28.
5. ★ LA 7.22.

Hjemmeopgaver

Du er nu rede til at gå i gang med de første to af hjemmeopgaverne i sæt 4.

Appetitvækker til næste uge

Gransk din gymnasieviden og noter mht. eksempler på differentiaalligninger og deres løsninger.