

Lineære afbildninger og basisskifte

Store Dag

Forelæsning: Emner fra *Lineær Algebra*, kapitel 6, afsnit 6.1 - 6.2, se også afsnit 5.3 i *Matematisk Analyse 1* (forberedelse kan tage udgangspunkt i eks. 6.3, 6.4 og 6.6) :

- Definition på en lineær afbildning, definitions- og dispositionsrum, billedrum og kerne for en lineær afbildning.
- Struktursætningen set som et udsagn om lineære afbildninger (sætning 6.2), dimensionsætningen (sætning 6.5).
- Matrixfremstilling (afbildningsmatricen) af en lineær afbildning (sætning 6.6, sætning 6.7, sætning 6.8 og sætning 6.9).
- Maple-Demo 06 .

Aktivitetsopgaver i klassen/databaren, hvor du møder din hjælpelærer kl. 12:00 og din klasselærer kl. 13:30.

1. Undersøg om følgende afbildninger er lineære, og angiv i givet fald deres kerne og billedrum:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3.$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2^2 + x_3^3.$

2. Geometer-øvelse i lineær afbildning af geometriske vektorer. Hent teksten (pdf) og det tilhørende Geometer-worksheet (gps) i mappen "Problem2" i Campusnet fildelingen under Matematik 1.

3. Lad $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4)$$

- (a) Vis at f er lineær og angiv afbildningsmatricen $\underset{e}{F}$ for f mht. de sædvanlige baser i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.

- (b) Find billedrummets dimension og angiv en basis for billedrummet.

- (c) Angiv en basis for afbildningens kerne.

4. Regn opgave LA 6.30.

5. ★ LA 6.15.

6. En afbildning $f : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ er givet ved at

$$f(x(t)) = x'(t) + 2x(t).$$

Vis at f er lineær, og angiv dens kerne og billedrum.

(Vink: For at finde kernen, se rammen på side 1.9 i MA 1. For at finde billedrummet se sætn. 1.2 i MA 1.)

7. Lad U være underrummet af $C^\infty(\mathbb{R})$ udsپændt af vektorerne $\cos(t)$, $\sin(t)$ og e^t . Lad endvidere f betegne følgende lineære afbildning (jvf. opgave 4):

$$f : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad f(x(t)) = x'(t) + 2x(t)$$

- (a) Vis, at $(\cos(t), \sin(t), e^t)$ er en basis for U .
- (b) Vis, at f afbilder U ind i sig selv.
- (c) Angiv afbildningsmatricen for $f : U \rightarrow U$ med hensyn til basis $(\cos(t), \sin(t), e^t)$.
8. ★ LA 6.4.

Lille Dag

Forelæsning: Emner fra *Lineær Algebra*, kapitel 5 og 6. Afsnit 5.5 og 6.1 - 6.3 (forberedelse kan tage udgangspunkt i sætn. 6.5 og eksemplerne 6.14 og 6.16) :

- Basisskifte (sætning 5.20 og formel (5.26)).
- Ændring af afbildningsmatricen ved basisskifte (sætning 6.10).
- Maple-Demo 07 .

Aktivitetsopgaver med assistance fra din klasselærer i klassen/databaren:

1. $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ betegner den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^2$ og $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{c}_4)$ en eller anden given basis for $\mathbb{R}^4$. Afbildningen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er en lineær afbildning, hvor

$$f(\underline{e}_1) = \underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \underline{c}_3 + \underline{c}_4 \quad \text{og} \quad f(\underline{e}_2) = \underline{c}_1 - 3\underline{c}_3 + 7\underline{c}_4.$$

- (a) Angiv matrixfremstillingen for f med hensyn til baserne $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ og $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{c}_4)$.
- (b) Løs den lineære ligning $f(\underline{x}) = 5\underline{c}_1 + 3\underline{c}_2 - 3\underline{c}_3 + 17\underline{c}_4$.
2. Lad $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være den lineære afbildning, der mht. den sædvanlige basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ i $\mathbb{R}^2$ har afbildningsmatricen

$$\underline{F}_{\underline{e}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestem afbildningsmatricen for f mht. basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ i $\mathbb{R}^2$, hvor $\underline{a}_1 = (1, 2)$ og $\underline{a}_2 = (3, 7)$.

3. Betragt en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, der i den sædvanlige basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = ((1, 0), (0, 1))$ for $\mathbb{R}^2$ er givet ved afbildningsmatricen

$$\underline{F}_{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

Vi skal nu med Maple undersøge om det er muligt at finde en anden basis af vektorer, for hvilken afbildningsmatricen er på *diagonalform* (det er jo noget simplere at arbejde med). For at være ambitiøse søger vi efter en ny basis af vektorer, der er specielle. Vektorerne skal være ortogonale og hver have længden 1. En måde at skrive sådanne basisvektorer er som $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, hvor $\underline{v}_1 = (\cos(t), \sin(t))$ er en enhedsvektor givet ved vinklen t , og hvor $\underline{v}_2 = (-\sin(t), \cos(t))$ er $\underline{v}_1$'s tværvektor.

- (a) Find $\underline{\underline{F}}_{e \leftarrow e}^T$ og $\underline{\underline{F}}_{e \leftarrow e}^T - \underline{\underline{F}}_{e \leftarrow e}$.
- (b) Find basisskiftematricen $\underline{\underline{M}}_{v \leftarrow v}$, der skifter fra v -koordinater til e -koordinater.
- (c) Beregn $\underline{\underline{M}}_{e \leftarrow v}^T \underline{\underline{M}}_{e \leftarrow v}$. Find $\underline{\underline{M}}_{e \leftarrow v}^{-1}$.
- (d) Find afbildningsmatricen $\underline{\underline{F}}_{v \leftarrow v}$ for f med hensyn til basis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$.
- (e) Find en vinkel t således, at $\underline{\underline{F}}_{v \leftarrow v}$ er på diagonalform, og angiv $\underline{\underline{F}}_{v \leftarrow v}$ for denne værdi af t . Skriv $f(\underline{v}_1)$ og $f(\underline{v}_2)$ som linearkombinationer af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$. Det skulle gerne se simpelt ud!
- (f) Matricen $\underline{\underline{F}}_{e \leftarrow e}$ ændres nu til $\underline{\underline{G}}_{e \leftarrow e} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ \sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$. Kan ovenstående nu lade sig gøre? Hvilken egenskab ved $\underline{\underline{F}}_{e \leftarrow e}$ ser ud til at være afgørende for ovenstående "diagonalisering"?
4. Vis, at vektorerne $\underline{a}_1 = (1, 2)$, $\underline{a}_2 = (3, 7)$ udgør en basis for $\mathbb{R}^2$, og at vektorerne $\underline{c}_1 = (1, 2, 2)$, $\underline{c}_2 = (2, 3, 1)$, $\underline{c}_3 = (1, 2, 1)$ udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er fastlagt ved, at

$$f(\underline{a}_1) = \underline{c}_1 + \underline{c}_2 - 3\underline{c}_3 \quad \text{og} \quad f(\underline{a}_2) = \underline{c}_1 - \underline{c}_2 - 2\underline{c}_3.$$

Angiv afbildningsmatricen for f mht basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ i $\mathbb{R}^2$ og basen $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$ i $\mathbb{R}^3$.

Angiv afbildningsmatricen for f mht basen $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ i $\mathbb{R}^2$ og den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^3$.

Angiv afbildningsmatricen for f mht den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^2$ og basen $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$ i $\mathbb{R}^3$.

Angiv afbildningsmatricen for f mht de sædvanlige baser i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Hjemmeopgaver

NB: Du er nu rustet til at gå i gang med de første to opgaver i hjemmeopgavesæt 3.

Appetitvækker til næste uge

En lineær afbildning f af polynomier af højst 2. grad er givet ved

$$f(1 - x^2) = x + 3x^2, \quad f(2) = x \quad \text{og} \quad f(2 + x + x^2) = 1 + x.$$

Hvad er matrixfremstillingen for f i "standard" monomie-basis $(1, x, x^2)$.