

Komplekse tal

Arbejdsplan

I semesterugerne 4 og 5 erstattes den regulære undervisning (forelæsninger og fællestimer) af selvstudium med opgaveregning og et mini-projekt i grupper af 6 personer. Klassen/databaren er til rådighed på Store Dage fra kl. 12:00 til 17:00, og derudover på Lille Dage fra kl. 8:00 til 12:00 (for skemaerne A og B) og fra kl. 13:00 til 17:00 (for skema C). Vi regner med en arbejdsbelastning på 16 timer per uge. En del hjemmearbejde er altså påkrævet.

Husk at medbringe lærebogen og opgavebogen i Matematisk Analyse 1, se kursusinformations-skrivelsen.

Klasselærerne og hjælpelærerne er til rådighed i de sædvanlige fællestimer, og I er velkomne til at benytte konsulenterne på alle Store Dage, altså både mandage, tirsdage og onsdage, kl. 15:30 til 16:30.

Alle 16 øvelsesopgaver løses (opgavenumre som fx 401, 402, etc. refererer til opgavebogen i Matematisk Analyse 1). Fire opgaver i komplekse tal udgør sammen med gruppens miniprojekt-rapport (se nedenfor) det andet hjemmeopgavesæt til aflevering til klasselæreren på Lille Dag i semesteruge 5.

Hver gruppe vælger *efter* at have løst øvelses-opgaverne én af de 4 mini-projekt-opgaver, som offentliggøres på fildeling for jeres Matematik 1-skemagrupper senest onsdag kl. 18:00 i semesteruge 4. Bemærk at der i klassen som helhed skal være valgt mindst 3 ud af de 4 opgaver. Gruppen løser den valgte opgave i fællesskab, udarbejder en fælles projekt-rapport og fremlægger denne på Lille Dag i semesteruge 5. Fremlæggelsen skal vare 10 minutter.

Projekt-rapporten afleveres sammen med løsningerne til de 4 øvelses-opgaver *før* fremlæggelsen af mini-projektet. Afleveringen af dette specielle 2. hjemmeopgavesæt er igen individuel i den forstand, at alle skal aflevere løsningerne til de 4 udvalgte opgaver, mens miniprojekt-rapporten kun afleveres i ét eksemplar pr. gruppe.

Grupperne vil modtage en vejledende bedømmelse for den mundtlige fremlæggelse af miniprojektet og naturligvis også få den kommenterede og rettede rapport tilbage. Gruppen kan derefter kopiere den rettede rapport til alle i gruppen. Det er vigtigt at I opbevarer den originale rettede rapport, da den skal afleveres sammen med de individuelle hjemmeopgave-porteføljer efter den afsluttende to-timersprøve til maj.

Bemærk, at afleveringen af rapporten skal ske før rapport-fremlæggelsen; der kræves altså en del planlægning i gruppen for at få disse ting organiseret, afleveret og kopieret som ønsket. Det er en del af opgaven.

Til orientering: Ved den skriftlige 2-timersprøve i kurset december 2009 stilles mindst én opgave, som omhandler komplekse tal.

Øvelsesopgaver

Opgave 1 (NB: Brug højst 20 minutter til denne opgave.)

1. Læs de 3 første sider i Matematisk Analyse 1, kapitel 4.
2. Giv en kort fremstilling (10 linier) af de problemer, som førte til indføring af de komplekse tal.

Opgave 2

1. Læs afsnit 4.1.
2. Betragt transformationsreglerne mellem et punkt A's retvinklede koordinater (a_1, a_2) og dets polære koordinater r, ν . Antag, at $(a_1, a_2) = (-1, -1)$. En studerende beregner da

$$r = \sqrt{2} \text{ og } \tan(\nu) = \frac{-1}{-1} = 1, \text{ dvs. } \nu = \pi/4.$$

Hvori består den studerendes fejl?

3. Angiv flere procedurer, således at fejlen ovenfor ikke kan opstå, og således at der altid fås korrekte resultater ved omregning fra retvinklede til polære koordinater.

Opgave 3

1. Læs side 4.7 og undersøg, om produktets definition i (4.10) stemmer overens med to vektorers skalarprodukt (prikprodukt) eller med vektorproduktet (krydsprodukt).
2. Eftersis, at de to definitioner (4.9) og (4.10) er ækvivalente, dvs. de udtrykker det samme.

Opgave 4

1. Læs siderne 4.9-4.12.
2. Hvad betyder det geometrisk, at et komplekst tal a bliver multipliceret med i ? Hvad betyder multiplikation med $-i$?
3. Hvad er $(i)^2, (i)^3, (i)^4, (i)^5, (-i)^2, (-i)^3, (-i)^4, (-i)^5$?
4. Hvad er realdelen og imaginærdelen af $-5 - i$?
5. Hvad er imaginærdelen af $-5 - 7i$?
6. Hvad er realdelen og imaginærdelen af $i - 5$?
7. Læs siderne 4.13 og 4.14.
8. Hvilke procedurer kan man benytte (udover Maple) til at omskrive $\frac{a+ib}{c+id}$ til $x+iy$?

Opgave 5

1. Læs side 4.15 inklusive eksempel 4.4.
2. Regn ved hjælp af Maple opgaverne 401, 403, 407, 410.
3. Lav bagefter en hådberegning af 401(b), 403(b), 407(a), 410 og skitsér resultaterne for disse opgaver.
4. Opgaverne 406 samt 449 med tilføjelsen: Skriv endvidere A på formen $a+ib$.

Opgave 6

Løs opgave 414.

Opgave 7

1. Læs siderne 4.16-4.18.
2. Hvor mange reelle rødder har et komplekst polynomium af grad n ?
3. Hvor mange reelle rødder har et reelt polynomium af grad n ?
4. Hvor mange reelle og komplekse rødder tilsammen har et reelt polynomium af grad n ?
5. Hvad er meningen med en rods multiplicitet?

Opgave 8

1. Læs sætning 4.4 med bevis.
2. Løs $z^2 = -4$, $z^2 = i$ og $z^2 = 1 - i$.
3. Skitsér løsningerne i den komplekse talplan.

Opgave 9

1. Læs resten af side 4.19 samt 4.20.
2. Løs a) $z^2 + 2z + 5 = 0$.
Bemærk: Der er kun reelle koefficienter i dette polynomium.

Opgave 10

1. Læs siderne 4.21-4.23 inklusive eksempel 4.7.
2. Løs opgave 430 og opgave 431 (b). Skitsér løsningerne.

Opgave 11

```
> F := proc(t)
> plots[display](
> plottools[arrow]([0,0], [cos(t), sin(t)], .05, .2, .2, color=green),
> plottools[line]([cos(t), sin(t)], [t, sin(t)], color=blue),
> plot(sin(x), x=0..t, thickness=2, view=[-1.5..7, -1.5..1.5])
> );
> end proc;
> animate(F,[theta], theta=0..2*Pi,
> background=plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi],color=black),
> scaling=constrained, axes=normal);
```

1. Indsæt ovenstående animations-procedure i et Maple worksheet og aktivér den. Beskriv i detaljer animationens matematiske pointe.
2. Hvilke ændringer kan der laves i proceduren, så den i stedet for $\sin(x)$ illustrerer henholdsvis a) $\sin(2x)$, b) $\cos(x)$ og c) $\cos(5x)$ for $x \in [0; 2\pi]$?
3. Lad $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$, $f_3(x) = \cos(x)$ og $f_4(x) = \cos(5x)$.
Løs hver af ligningerne $f_i(x) = 0.5$, $i = 1..4$, for henholdsvis $x \in [0; 2\pi]$ og $x \in \mathbb{R}$.

4. Hvilken *periode* har hver af de fire funktioner?

Opgave 12

1. Læs afsnit 4.4 om e^z .

2. Lær formelen (4.33) udenad!

3. Vis, at definitionen af e^z , $z = x + iy$, opfylder følgende regneregler:

(a) $e^z = e^x$, hvis $y = 0$.

(b) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

(c) $\frac{d}{dy}(e^{a+iy}) = ie^{a+iy}$ og $\frac{d^2}{dy^2}(e^{a+iy}) = -(e^{a+iy})$, hvor a og y er reelle tal.

(d) Eftersis differentiationerne i (c) med Maple.

4. Opgave 438.

5. Benyt Eulers formler (4.40) og (4.41) til at eftervise den velkendte formel

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad .$$

6. Opgave 440.

Opgave 13 Opgave 436 (a) og (b). Find desuden en Maple-kommando, som løser opgaven.

Opgave 14

Opgave 437 (a) og (b).

Opgave 15

Opgave: 480 .

Opgave 16

Mange kurver og områder i planen kan karakteriseres “komplekst”. Find kurvens eller områdets art og plot hvert af tilfældene med Maple.

1. $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 3\}$.

2. $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + i|\}$.

3. $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 + i| < 2\}$.

Hjemmeopgavesæt 2

Sættet findes på hjemmesiden under Oversigt E09. Skal afleveres til klasselæreren Lille Dag i semesteruge 5: