

## Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant, vektorrum

Store Dag

**Forelæsning:** Emner fra *Lineær Algebra*, kapitel 2 og 3 (forberedelse kan tage udgangspunkt i eksempel 2.14 og 2.17) :

- Kvadratiske matricer, invers matrix (Sætning 2.13 og 2.16).
- Permutationer. Fortegn for en permutation. Determinanten af en  $n \times n$  matrix.
- Nogle sætninger om determinanter (sætning 3.5, 3.6, 3.9, 3.10 og 3.12).
- Maple-Demo 03 .

**Aktivitetsopgaver (I dag møder du din hjælpelærer kl. 12:00 i klassen/databaren og kl.13:30 din klasselærer).**

Løs med Maple-assistance følgende opgaver:

1. LA 2.4.
2. LA 3.3.
3. LA 2.32.

4. Givet matricen  $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 0 & a^2 & a^3 \\ 1 & a & a & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a \end{bmatrix}$ , hvor  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Bestem determinanten af  $\underline{\underline{A}}$  som et polynomium i  $a$ .
- (b) Bestem rødderne i dette polynomium.
- (c) Find rangen af  $\underline{\underline{A}}$  for  $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  . Hvad har rangen med de fundne rødder i determinanten at gøre?
- (d) Find rangen af  $\underline{\underline{A}}$  for alle  $a$ .
- (e) Løs det homogene lineære ligningssystem der har  $\underline{\underline{A}}$  som koefficientmatrix.

Herefter kommer nu opgaver, som du først bør regne uden Maple, hvorefter du checker resultatet med Maple:

5. Hvad er betingelsen for, at en kvadratisk matrix har en invers?
6. Givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ og } \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Udregn  $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}$ ,  $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{D}}$  og  $\underline{\underline{D}}\underline{\underline{C}}$ . Angiv, hvis det er muligt,  $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ,  $\underline{\underline{B}}^{-1}$  og  $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1}$ .

7. Læs eksempel 2.14. Undersøg om  $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$  hhv.  $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

har en invers, og angiv den i givet fald.

8. Hvad er forskellen mellem en determinant og en matrix?
9. Hvad sker der med værdien af en determinant, når man skifter fortegn på alle elementer i en række? Hvad hvis man skifter fortegn på samtlige elementer i hele matricen?
10. Givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Udregn  $\det(\underline{\underline{A}})$  og  $\det(\underline{\underline{B}})$  med Maple.
- (b) Udregn  $\det(\underline{\underline{A}}^7)$  og  $\det(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}})$  i hovedet.
- (c) Vis, at  $\underline{\underline{A}}$  har en invers, og angiv  $\det(\underline{\underline{A}}^{-1})$  og  $\det(\underline{\underline{A}}^{-7})$ .

11. For hvilke værdier af  $\lambda$  er  $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & -\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$  ?

12. Givet matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{h}} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad \text{hvor } a, \dots, f \in \mathbb{R}.$$

- (a) Løs ligningen  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{h}}$  med Maple.
- (b) Lad Maple beregne  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  og  $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{h}}$ .
- (c) Vis, at det er den samme løsning  $\underline{\underline{x}}$ , som optræder i de to udregninger ovenfor og vis, at de to elementer i  $\underline{\underline{x}}$  kan skrives som en kvotient af to determinanter (dette resultat kaldes da Cramer's formel. Den kan udvides til  $n \times n$  systemer, jvf. sætning 3.16).
- (d) Nævn den vigtige forudsætning for, at beregningerne ovenfor kan gennemføres og er meningsfulde. Hvad er løsningen  $\underline{\underline{x}}$  når denne forudsætning ikke er opfyldt?

13. ★ LA 3.9.

Download Geometer til din pc

Vi vil nogle gange fremover illustrere centrale begreber med det dynamiske geometri-program Geometer. Den første enkle øvelse ligger på Lille Dag i denne uge. Programmet, som desværre kun kan afvikles på Windows, kan hentes på Campusnet fildelingen under Matematik 1. Vi opfordrer til samarbejde omkring Windows-pc'erne i jeres gruppe.

Lille Dag

**Forelæsning:** Emner fra *Lineær Algebra*, kapitel 5 (forberedelse kan tage udgangspunkt i eks. 5.1-5.6) :

- Geometriske vektorer.
- Vektorrum, underrum.

- Linearkombination, lineær afhængighed og lineær uafhængighed.
- Maple-Demo 04 .

**Aktivitetsopgaver:** Gå i klassen/databaren og benyt gerne en eller flere af Maple's kommandoer som f.eks. Rank , LinearSolve eller ReducedRowEchelonForm som hjælp til at løse eller checke følgende opgaver. (Ikke relevant for opgave 1 og opgave 2.):

1. Geometer-øvelse i geometrisk vektoraddition. Hent teksten (pdf) og det tilhørende Geometer-worksheet (gps) i mappen "Problem1" i Campusnet fildelingen under Matematik 1.
2. Angiv
  - (a) Nulvektoren i  $\mathbb{R}^n$ .
  - (b) Nulvektoren i  $C^0(I)$ .
  - (c) Nulvektoren i  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .
  - (d) Nulvektoren i  $P_n(\mathbb{R})$ .
3. Undersøg om der er lineær afhængighed eller lineær uafhængighed i følgende systemer af vektorer (definition 5.5):
  - (a)  $(1, 2, 1, 0), (2, 7, 3, 1), (3, 12, 5, 2)$  (i  $\mathbb{R}^4$ ).
  - (b)  $1 + 2x + 3x^2 + x^3, 2 + 5x - x^2 + x^3, -3 + 2x - 4x^2 - 2x^3$  (i  $P_3(\mathbb{R})$ ).
  - (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  (i  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ ).
4. I  $P_3(\mathbb{R})$  er givet vektorerne  $P_1(x) = 1 + x - 2x^2 + 2x^3, P_2(x) = x + x^2 - 3x^3, P_3(x) = 2x^3$  og  $P_4(x) = 1 + 3x + 4x^3$ . Undersøg, om  $P_4(x) \in \text{span}\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ .
5. Undersøg, om følgende delmængder af vektorrum er underrum (definition 5.3 og sætning 5.4).
  - (a)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0\}$  ( $\subset \mathbb{R}^4$ ).
  - (b)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$  ( $\subset \mathbb{R}^4$ ).
  - (c) Mængden af differentiable funktioner ( $\subset C^0(\mathbb{R})$ ).
6. Undersøg om der er lineær afhængighed eller lineær uafhængighed i følgende systemer af vektorer (definition 5.5, vink: se eks. 5.30):
  - (a)  $\cos^2(x), \sin^2(x)$  (i  $C^0(\mathbb{R})$ ).
  - (b)  $\cos^2(x), 1 - \sin^2(x), \ln(4x^2 + 5)$  (i  $C^0(\mathbb{R})$ ).
7. Diskutér fordele og ulemper ved at indføre abstrakte vektorrum. Læs eksemplerne 5.1 - 5.7 (som fortsætter i eksempel 5.25), samt eksempel 5.29.

|                   |
|-------------------|
| Hjemmeopgavesæt 1 |
|-------------------|

Sættet findes på hjemmesiden under Oversigt E09. Afleveres til klasselæreren på **Store Dag** i semesteruge 3 ved klassesitens begyndelse, dvs. deadline 13:30. Vær forberedt på at der kan være kø ved DTU's printere!