

## Hjemmeopgavesæt 4:

Afleveres til klasselæreren på Lille Dag i semesteruge 10.

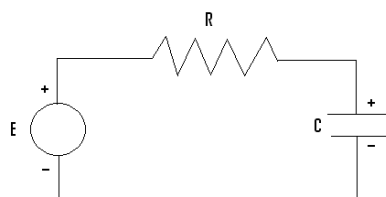
1. Givet matricen  $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ .

- (a) Find med elementære metoder (håndregning eller "simuleret håndregning") egen-værdierne for  $\underline{\underline{A}}$ , og for hver af egen-værdierne samtlige tilhørende egenvektorer.
- (b) Bestem en basis for  $\mathbb{R}^3$  bestående af egenvektorer for  $\underline{\underline{A}}$ .
- (c) Findes der en søjlevektor  $\underline{\underline{v}}$ , således at  $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{v}} = -\underline{\underline{v}}$ ?
- (d) Find (gerne vha. Eigenvectors) egen-værdier og samtlige tilhørende egenvektorer for  $\underline{\underline{A}}^T$ , og kommentér resultatet.
- (e) Vælg et tal og læg det til hvert af de tre diagonalelementer i  $\underline{\underline{A}}$ . Find (gerne vha. Eigenvectors) egen-værdier og samtlige tilhørende egenvektorer for den herved fremkomne matrix, og kommentér resultatet.

2. Der er givet to matricer  $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & a+2 & 0 \\ -2 & 0 & 2-a \end{bmatrix}$  og  $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ a^2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,

hvor  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Angiv for ethvert  $a$  samtlige (forskellige) egen-værdier for både  $\underline{\underline{A}}$  og  $\underline{\underline{B}}$ .
  - (b) Anfør for både  $\underline{\underline{A}}$  og  $\underline{\underline{B}}$  den algebraiske og geometriske multiplicitet for hver af de funde egen-værdier.
  - (c) For hvilke værdier af  $a$  er  $\underline{\underline{A}}$  henholdsvis  $\underline{\underline{B}}$  similær med en diagonalmatrix?
  - (d) For hvilke værdier af  $a$  er  $\underline{\underline{A}}$  og  $\underline{\underline{B}}$  indbyrdes similære?
  - (e) Sæt nu  $a = 3$ , og lad  $f$  og  $g$  være lineære afbildninger der har  $\underline{\underline{A}}$  henholdsvis  $\underline{\underline{B}}$  som afbildningsmatrix mht. den sædvanlige basis i  $\mathbb{R}^3$ . Bestem to baser,  $b_1$  og  $b_2$ , således at afbildningsmatricen for  $f$  mht.  $b_1$  er en diagonalmatrix som er identisk med afbildningsmatricen for  $g$  mht.  $b_2$ .
3. Figuren nedenfor viser et elektrisk kredsløb bestående af følgende komponenter: En modstand  $R$ , en kapacitor med kapaciteten  $C$  og en spændingsgenerator  $E$  med spændingen  $E(t) = \sin(2t)$ .



Spændingen  $V(t)$  over kapacitoren (kondensatoren) bestemmes af differentialligningen

$$RC \frac{dV(t)}{dt} + V(t) = \sin(2t).$$

- (a) Find vha. den komplekse gættemetode (som i opg. H72 (1) i MA1) en partikulær løsning til differentialligningen, og benyt den ved opstillingen af den fuldstændige løsning til differentialligningen.
- (b) Sæt  $R = 1$  og  $C = 1$ . Plot den løsning der opfylder begyndelsesbetingelsen  $V(0) = 2$  sammen med den partikulære løsning du fandt vha. den komplekse gættemetode, og kommentér resultatet.

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du

- forstår definitionen på en egenverdi og en egenvektor
- kan finde egenverdier og udregne deres geometriske og algebraiske multipliciteter
- kan finde egenvektorer og tilhørende egenrum
- i særlige tilfælde kan afgøre om to givne matricer er similære
- forstår ideen i at man i visse tilfælde benytter gættemetoder ved løsning af differentialligninger
- kan udnytte struktursætningen ved løsning af ikke-homogene lineære differentialligninger
- skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer