

Hjemmeopgavesæt 1:

Afleveres til klasselæreren på Store Dag i semesteruge 3.

1. a) LA 1.9 regnes med Maple. Forklar resultatet i lyset af sætning 1.9 og i lyset af bemærkningen nederst side 54 (vedr. indflydelsen af $\rho(\underline{T})$ og $\rho(\underline{A})$).

b) I stedet for 1. ligning i LA 1.9 benyttes nu $x + 2y - 2z = 0$, mens de øvrige ligninger bevares uændret. Løs det nye ligningssystem. Forklar resultatet i lyset af sætning 1.9 og indflydelsen af $\rho(\underline{T})$ og $\rho(\underline{A})$.

c) I stedet for 1. ligning i LA 1.9 benyttes nu $x + y - 2z = 3$, mens de øvrige ligninger bevares uændret. Samme spørgsmål som i b).

d) Benyt

`> with(plots):`

og `implicitplot3d` kommandoen til at illustrere alle tilfældene ovenfor (se evt. eksempler i Maple's Help under `implicitplot3d`). Klik på plottet, så kan du vende og dreje billedet således at den ønskede løsningsmængde ses tydeligt.

2. Betragt matricerne som i Maple er givet ved

$A_1 := \langle \langle -2 \rangle \rangle$,

$A_2 := \langle \langle -2, -1 \rangle \mid \langle -1, -2 \rangle \rangle$,

$A_3 := \langle \langle -2, -1, 0 \rangle \mid \langle -1, -2, -1 \rangle \mid \langle 0, -1, -2 \rangle \rangle$,

$A_4 := \langle \langle -2, -1, 0, 0 \rangle \mid \langle -1, -2, -1, 0 \rangle \mid \langle 0, -1, -2, -1 \rangle \mid \langle 0, 0, -1, -2 \rangle \rangle$

og så videre, således at A_n betegner en $n \times n$ matrix med -2 på alle felter i diagonalen, -1 i alle nabofelterne til diagonalen og 0 i de resterende felter.

(a) Udregn $\det(\underline{A}_1)$, $\det(\underline{A}_2)$, $\det(\underline{A}_3)$, $\det(\underline{A}_4)$ og $\det(\underline{A}_{10})$.

(b) Gæt på en formel for $\det(\underline{A}_n)$.

(c) Bring matricerne $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$, $\underline{A}_4$ og $\underline{A}_{10}$ på øvre trekantform med rækkeoperationer (brug evt Maple's `GaussianElimination`).

(d) Ser der ud til at være system i det? Forklar den formel for $\det(\underline{A}_n)$ som du gættede på i spørgsmål (b).

3. Der er givet matricen $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ hvor $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestem rangen af $\underline{A}$ (hvordan afhænger den af værdien af a ?).

(b) Løs det lineære ligningssystem:

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Opgaven fortsætter $\longrightarrow$

(c) Bestem løsningsmængden til matrixligningen

$$\underline{\underline{A}}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er den ovenfor givne matrix.

NB: I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du

- kan manipulere med ækvivalente matricer
- kan gå fra et ligningsystem til en totalmatrix
- kan gå fra en reduceret totalmatrix til en parameterfremstilling for løsningsmængden
- demonstrerer sammenhængen mellem rangen af koefficientmatricen, rangen af totalmatricen, antal ubekendte og antal løsninger
- viser en geometrisk forståelse af løsninger til ligninger og ligningssystemer
- kan beregne en determinant og ved hvad en rækkeoperation gør ved determinanten
- kan tage en eksperimenterende tilgang til matematikken
- skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer