

Integration i flere Variable

Steen Markvorsen

Institut for Matematik og Learning Lab DTU

28. januar 2005

Indhold

1	Introduktion	5
1.1	Hvad er et punkt og hvordan ser vi det?	6
1.2	Summer og integraler	6
1.3	Dobbeltsummer, dobbeltintegraler, etc.	8
2	Kurveintegraler	11
2.1	Hvad er en kurve?	11
2.2	Motivering af kurveintegralet	16
2.3	Det tangentielle kurveintegral	18
3	Fladeintegraler	21
3.1	Hvad er en flade?	21
3.2	Motivering af fladeintegralet	22
3.3	Omdrejningsflader	25
3.4	Det ortogonale fladeintegral, fluxen	25
4	Planintegraler	29
4.1	Hvad er et område i planen?	29
5	Rumintegraler	33
5.1	Hvad er et rumligt område?	33
5.2	Motivering af rumintegralet	34
5.3	Omdrejningslegemer	37
6	Massemidtpunkter	41
6.1	Hvad er et massemidtpunkt?	41
7	Inertimomenter	45
7.1	Hvad er et inertimoment?	45
8	Vektorfelter og deres flowkurver	49
8.1	Hvad er et vektorfelt?	49
8.2	Flowkurver for et vektorfelt	50

9	Divergens og Gauss' sætning	55
9.1	Hvad er divergensen af et vektorfelt?	55
9.2	Motivering af divergensen: Volumen-ekspansion	55
9.3	Gauss' sætning	58
10	Rotation og Stokes' sætning	59
10.1	Hvad er rotationen af et vektorfelt?	59
10.2	Motivering af rotationen: Vridning	59
10.3	Gauss–Stokes' sætning for rumlige områder	61
10.4	Stokes' sætning	62
11	Hvordan bruges Integrator3 ?	67
11.1	Om at konstruere pakker med Maple-procedurer	67
11.2	Eksempel: Beregning af et rumintegral over en massiv kasse.	67

Kapitel 1

Introduktion

Denne note handler om parameterfremstillinger for kurver, flader og rumlige områder og om integration af funktioner på sådanne geometriske objekter. Formålet er primært at opstille og motivere de generelle definitioner af henholdsvis kurve- flade- og rum-integraler.

Udgangspunktet er Taylor's grænseformel (til 1. orden) for de koordinatfunktioner, der benyttes til parameterfremstillingerne for kurverne, fladerne og de rumlige områder. De punktvis lineariserede parameterfremstillinger benyttes til konstruktionen af approksimerende sumformler for de ønskede integraler. Det er samtidig disse summer, der på naturlig måde motiverer og illustrerer de generelle beregningsudtryk for kurve- flade- og rum-integralerne.

Undervejs introduceres `Integrator3`. Det er en pakke med Maple procedurer, som er udviklet specielt med henblik på eksempelbaseret visuel læring af de indledende integrationsbegreber og deres mangfoldige anvendelser.

Vi giver eksempler på, hvordan integration i flere variable anvendes til beregning og forståelse af massemidtpunkter, inertimomenter, kraftmomenter, etc.

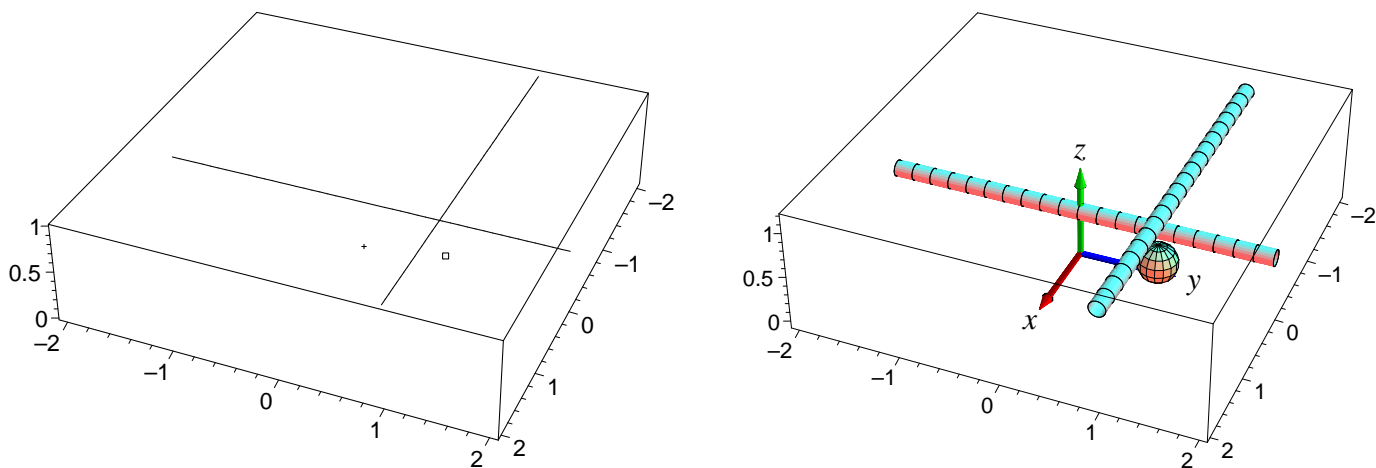
Flowkurverne for et givet vektorfelt i rummet kan findes og visualiseres med `Integrator3`. De vigtige begreber divergens og rotation for et vektorfelt fremtræder derved som naturlige størrelser til beskrivelsen af den bevægelse i rummet, der har et givet vektorfelt som hastighedsfelt.

Til sidst i noten benyttes de gennemgåede metoder og resultater til at præsentere to klassiske perler indenfor flervariabel global analyse: Gauss' sætning og Stokes' sætning for vektorfelter i rummet.

1.1 Hvad er et punkt og hvordan ser vi det?

Med henblik på at kunne lokalisere en begivenhed eller et sted p_1 i rummet beskriver vi sædvanligvis stedet med 3 koordinater (x_1, y_1, z_1) . Det kan selvsagt kun lade sig gøre hvis vi har et koordinatsystem til rådighed i rummet. Med et passende valgt fast koordinatsystem bliver det muligt at analysere flere punkters beliggenhed i forhold til hinanden. Når koordinaterne for punkterne alle refererer til ét og samme sædvanlige retvinklede (x, y, z) -koordinatsystem kan vi f.eks. udtrykke afstanden $d(p_1, p_2)$ mellem to givne punkter p_1 og p_2 ved det velkendte Pythagoræiske udtryk:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad .$$



Figur 1.1: Et 'punkt' og to rette 'linjestykker' i rummet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. 'Punktets' koordinater med hensyn til det viste koordinatsystem er $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Det ene linjestykke har konstant z -koordinat 1 mens det andet har konstant z -koordinat $\frac{1}{2}$.

Bemærkning 1.1. Som illustreret i Figur 1.1 kan det være en fordel at vise punkter og kurver i rummet i passende 'fede' versioner, således at særligt vigtige punkter optræder som små kugler og kurver figurerer som tuber. Meningen er selvsagt den, at det så typisk bliver en del lettere at se den indbyrdes beliggenhed og de relative størrelser af de geometriske objekter. At visualisere på denne måde hvad der foregår er en af de primære intentioner med Integrator3.

1.2 Summer og integraler

På den reelle u -akse betragter vi en fast valgt kontinuert reel funktion $f(u)$. For et givet helt tal $n > 0$ gør vi nu følgende. Først fordeles de n punkter ligeligt i intervallet $[0, 1]$ så de får

koordinaterne u_i , hvor $i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$, således:

$$u_1 = \frac{1}{n}, \quad u_2 = \frac{2}{n}, \quad u_3 = \frac{3}{n}, \quad \dots, \quad u_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad u_n = 1 \quad ,$$

Opgave 1.2. Bemærk, at hvis vi forøger antallet af punkter n med 1, og ønsker en ligelig fordeling af de $n+1$ punkter, så vil (næsten) alle de tidligere placerede n punkter i intervallet $[0, 1]$ skulle flyttes (lidt) for at give plads til det nye punkt. Hvilke skal nødvendigvis flyttes? Hvor meget?

For et fast antal n ligeligt fordelte punkter betragter vi nu funktionsværdien af f i hvert af punkterne, altså de n værdier $f(\frac{1}{n}), f(\frac{2}{n}), f(\frac{3}{n}), \dots, f(\frac{n-1}{n}), f(1)$.

Summen af disse værdier vil afhænge meget af antallet n af funktionsværdier, men hvis vi først dividerer hver enkelt funktionsværdi med n får vi følgende vægtede sum af funktionsværdierne:

$$I(f, n, [0, 1]) = \sum_{i=1}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} \quad .$$

Opgave 1.3. Vis, at den vægtede sum af funktionsværdierne af f i de ligeligt fordelte punkter i intervallet er begrænset af f 's største værdi og af f 's mindste værdi i intervallet.

Den vægtede sum er ikke blot begrænset for alle n , men har også en grænseværdi for n gående imod uendelig, idet der gælder følgende fundamentale identitet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, n, [0, 1]) = \int_0^1 f(u) du \quad .$$

Hvis vi benytter den samme strategi med en ligelig fordeling af punkter på det generelle interval $[a, b]$ på u -aksen har vi tilsvarende:

Sætning 1.4. Lad $f(u)$ betegne en kontinuert funktion på intervallet $[a, b]$, og lad

$$I(f, n, [a, b]) = \sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \left(\frac{b-a}{n}\right) \quad .$$

Så gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, n, [a, b]) = \int_a^b f(u) du \quad .$$

Summer af typen $I(f, n, [a, b])$ vil vi derfor i det følgende kalde *integralsummer*.

Opgave 1.5. Lad $f(u) = 3u$, $u \in [0, 1]$. Så er

$$I(f, n, [0, 1]) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{3i}{n}\right) \frac{1}{n} \quad .$$

Benyt Maple – først til at beregne denne sum som funktion af n og dernæst til at eftervise sætning 1.4 i dette konkrete tilfælde, dvs.

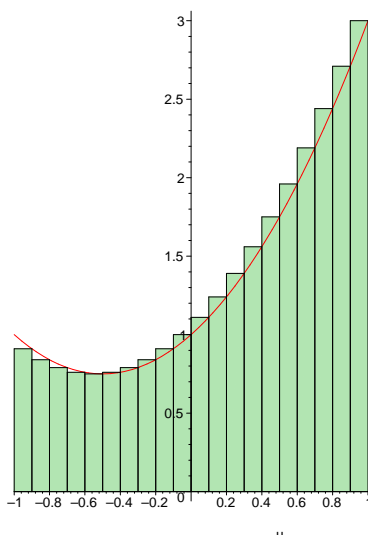
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, n, [0, 1]) = \int_0^1 f(u) du = \frac{3}{2} \quad .$$

Opgave 1.6. Lad $f(u) = 1 + u + u^2$, $u \in [-1, 1]$. Så er

$$\begin{aligned} I(f, n, [-1, 1]) &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 + \left(-1 + \frac{2i}{n} \right) + \left(-1 + \frac{2i}{n} \right)^2 \right) \frac{2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{2n^2 + 8i^2 - 4in}{n^3} \right) . \end{aligned}$$

Benyt igen Maple til at beregne denne sum som funktion af n og dernæst til at eftervise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, n, [-1, 1]) = \int_{-1}^1 (1 + u + u^2) du = \frac{8}{3} .$$



Figur 1.2: Output fra kommandoen `rightsum` i `student`-pakken i Maple. Areal-repræsentation af integralsummen $I(f, n, [-1, 1])$ i opgave 1.6 med $n = 20$ delepunkter i intervallet $[a, b] = [-1, 1]$. De 20 addender i summen er repræsenteret ved rektangulære søjler med den fælles bredde $(b - a)/20 = 1/10$ og højder givet ved værdierne af funktionen $f(u) = 1 + u + u^2$ i intervallets delepunkter.

1.3 Dobbeltsummer, dobbeltintegraler, etc.

For funktioner af to variable har vi tilsvarende

Sætning 1.7. Lad $f(u, v)$ betegne en kontinuert reel funktion på et rektangel $[a, b] \times [c, d]$ i (u, v) -planen. Antag, at intervallet $[a, b]$ deles ligeligt i n lige store delintervaller og at intervallet $[c, d]$

tilsvarende deles ligeligt i m lige store delintervaller, og lad

$$\Pi(f, n, m, [a, b] \times [c, d]) = \sum_{j=1}^{j=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} f \left(a + \frac{i}{n}(b-a), c + \frac{j}{m}(d-c) \right) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) \left(\frac{d-c}{m} \right) .$$

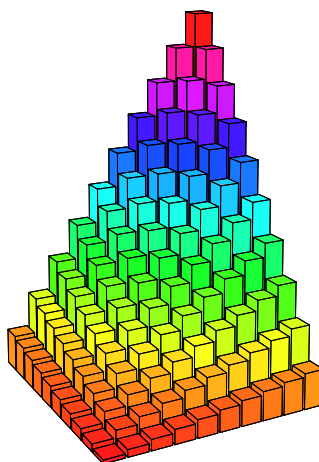
Så gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi(f, n, m, [a, b]) \right) = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, v) du \right) dv . \quad (1.1)$$

Summer af typen $\Pi(f, n, m, [a, b] \times [c, d])$ vil vi kalde *dobbelt integralsummer*.

Opgave 1.8. Lad $f(u, v) = uv^2$ for $u \in [0, 1]$ og $v \in [-1, 1]$. Bestem for ethvert n og m værdien af $\Pi(f, n, m, [0, 1] \times [-1, 1])$. Brug Maple. Eftervis sætning 1.7 i dette konkrete tilfælde.

Opgave 1.9. Overvej, om det er vigtigt at summere, integrere, og finde grænseværdierne i den rækkefølge, som anvises med parenteserne i ligning (1.1). Efterprøv på eksemplet i opgave 1.8.



Figur 1.3: Volumen-repræsentation af integralsummen $\Pi(f, 10, 10, [0, 1] \times [0, 1])$ for funktionen $f(u, v) = uv$. De 100 addender i summen er repræsenteret ved søjler med samme kvadratiske tværsnit og med højder, som er givet ved de respektive værdier af funktionen $f(u, v) = uv$ i (u, v) -kvadratets delepunkter. Histogrammer som dette kan konstrueres med Maple's indbyggede kommando `matrixplot`.

Opgave 1.10. Formulér den sætning, som generaliserer de to foregående sætninger, dvs. sætning 1.4 og sætning 1.7, til funktioner $f(u, v, w)$ af 3 variable $(u, v, w) \in [a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ idet hvert af de tre intervaller først inddeles i henholdsvis n , m , og q lige store delintervaller. Check din sætning på funktionen $f(u, v, w) = uvw$.

Kapitel 2

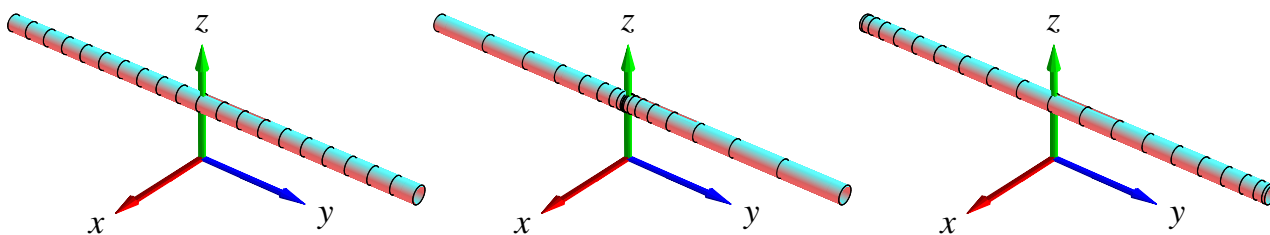
Kurveintegraler

2.1 Hvad er en kurve?

En parametriseret kurve $K_{\mathbf{r}}$ i rummet er givet ved en parameterfremstilling således:

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b] \quad (2.1)$$

Eksempel 2.1. Figur 2.1 viser tre forskellige parametriseringer af det rette linjestykke fra $(0, -2, \frac{1}{2})$ til $(0, 2, \frac{1}{2})$. Figur 2.2 viser to forskellige parametriseringer af en cirkel med radius 1 og centrum i $(0, 0, 0)$. Figur 2.3 viser tilsvarende 2 forskellige parametriseringer af en skrueelinje.



Figur 2.1: Linjestykket fra $(0, -2, \frac{1}{2})$ til $(0, 2, \frac{1}{2})$ er her parametriseret på 3 forskellige måder: $\mathbf{r}_1(u) = (0, 2u, \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$, $\mathbf{r}_2(u) = (0, 2u^3, \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$ og $\mathbf{r}_3(u) = (0, 2 \sin(\frac{\pi}{2}u), \frac{1}{2})$, $u \in [-1, 1]$. Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet* $[-1, 1]$ som består af 20 lige store delintervaller. Bemærk, at længden af de tre 'kurver' klart er den samme, selv om parametriseringerne er ret forskellige.

Vi antager her og i det følgende, at de tre koordinatfunktioner $x(u)$, $y(u)$ og $z(u)$ i parameterfremstillingerne er pæne, glatte funktioner af u , således at de specielt er differentiable (og derfor kontinuerte) og har kontinuerte afledede $x'(u)$, $y'(u)$ og $z'(u)$ i intervallet $[a, b]$. Så har vi også, at

$$\|\mathbf{r}'(u)\| = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \quad (2.2)$$

er en kontinuert funktion i intervallet $[a, b]$. Specielt kan denne funktion derfor *integreres* over intervallet, og det har vi om lidt brug for i Definition 2.7 nedenfor.

Definition 2.2. En parameterfremstilling $\mathbf{r}(u)$ for en kurve $K_{\mathbf{r}}$ - som i (2.1) - siges at være en regulær parameterfremstilling hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle } u \in [a, b] \quad . \quad (2.3)$$

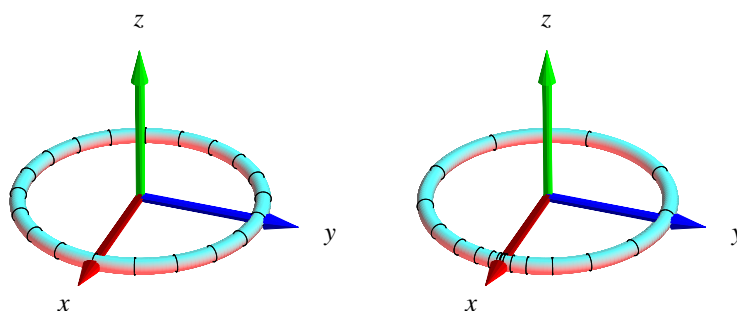
Opgave 2.3. Hvilke af parameterfremstillingerne i figurerne 2.1, 2.2, 2.3, og 2.4 er regulære?

Bemærkning 2.4. En parametriseret kurve er andet og mere end blot billedmængden (punkt-mængden) $\mathbf{r}([a, b])$, idet selve parametriseringen eksempelvis kan foreskrive at dele af punkt-mængden skal gennemløbes flere gange, se eksempel 2.12 nedenfor.

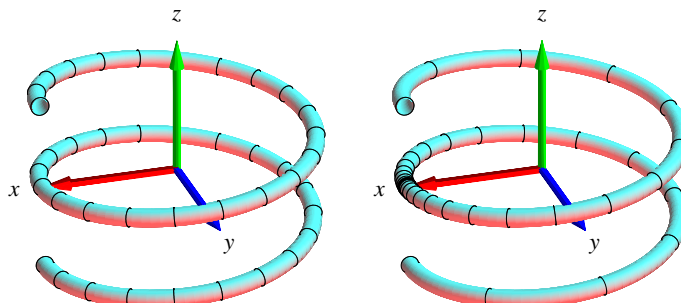
Man kan gerne tænke på intervallet $[a, b]$ som en retlinet elastik i hvile. Vektor-afbildningen \mathbf{r} deformerer elastikken (ind i rummet) ved at bøje, strække eller komprimere elastikken. En lokal strækning gør selvfølgelig elastikken lokalt længere, mens en lokal komprimering gør elastikken lokalt kortere. Et første naturligt spørgsmål er derfor hvor lang hele elastikken er efter brug af afbildningen \mathbf{r} . Kurveintegralet indføres blandt andet med henblik på at finde den totale længde af den deformerede kurve i rummet.

Vi kan ligeledes forestille os, at den parametriserede kurve selv er masseløs, men at den til gengæld efter deformationen med \mathbf{r} farves med en maling på en sådan måde at massetætheden af malingen langs med kurven (i gram pr. centimeter, f.eks.) er givet som en funktion f af stedet (x, y, z) i rummet – altså sådan at massetætheden af malingen på stedet $\mathbf{r}(u)$ er $f(\mathbf{r}(u))$. Opgaven er da at finde den totale masse af den deformerede og farvelagte parametriserede kurve. Bemærk, at med lidt fantasi kan vi endda gerne tillade, at 'massetætheden' f antager negative værdier.

Disse forestillinger skal naturligvis kun hjælpe os til at få en passende intuitiv forståelse af de indførte begreber; vi skal senere se adskillige andre tolkninger og brug af kurveintegralet.



Figur 2.2: En cirkel i (x, y) -planen er her parametriseret på 2 forskellige måder: $\mathbf{r}_1(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u), 0)$, $u \in [-1, 1]$, og $\mathbf{r}_2(u) = (\cos(\pi u^3), \sin(\pi u^3), 0)$, $u \in [-1, 1]$. Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet* $[-1, 1]$ som består af 20 lige store delintervaller. Længden af cirklen er 2π - uafhængig af parametriseringen.



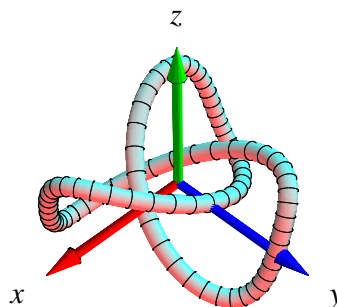
Figur 2.3: En skruelinje i rummet. Se eksempel 2.5.

Eksempel 2.5. Skruelinjen i Figur 2.3 er igen præsenteret med 2 forskellige parametriseringer:

$$\mathbf{r}_1(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \frac{\pi}{5}u), \quad u \in [-1, 1], \text{ og}$$

$$\mathbf{r}_2(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), \frac{\pi}{5}u^3), \quad u \in [-1, 1].$$

Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet* $[-1, 1]$ som består af 40 lige store delintervaller. Kurverne er igen klart lige lange (se opgave 2.16)



Figur 2.4: En knude. Se eksempel 2.6

Eksempel 2.6. Knuden i Figur 2.4 har parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \left(-\frac{1}{3}\cos(u) - \frac{1}{15}\cos(5u) + \frac{1}{2}\sin(2u), \frac{1}{3}\sin(u) - \frac{1}{15}\sin(5u) - \frac{1}{2}\cos(2u), \frac{1}{3}\cos(3u) \right),$$

hvor $u \in [-\pi, \pi]$.

Definition 2.7. Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^3 . Kurveintegralet af funktionen f over en parametriseret kurve $K_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) du, \quad \text{hvor} \quad (2.4)$$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = \|\mathbf{r}'(u)\| \quad (2.5)$$

betegner længden af tangentvektoren $\mathbf{r}'(u)$ til kurven på stedet $\mathbf{r}(u)$.

Læg mærke til, at det symbol, der står på venstre siden af lighedstegnet i (2.4), kun er et symbol for kurveintegralet. Det integral vi skal regne ud står på højre side – og det kan lade sig gøre at integrere, fordi både f , \mathbf{r} og $\|\mathbf{r}'\|$ er kontinuerte, således at integranden er kontinuert. Hvis vi indsætter $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ i udtrykket for kurveintegralet får vi:

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_a^b f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \quad . \quad (2.6)$$

Bemærkning 2.8. Parameterfremstillingen (2.1) for kurven er regulær hvis $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) > 0$ for alle u i det givne interval $[a, b]$.

Eksempel 2.9. Givet funktionen $f(x, y, z) = 7x$ og et parametriseret cirkelstykke

$$C_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad .$$

Kurveintegralet af f over $C_{\mathbf{r}}$ er

$$\begin{aligned} \int_{C_{\mathbf{r}}} f d\mu &= \int_{-\pi/2}^{\pi} f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) du = 7 \quad . \end{aligned}$$

Som nævnt, og som vi vil godtgøre nedenfor - i afsnittet *Motivering af kurveintegralet* - kan kurveintegraler benyttes til at finde længder af parametriserede kurver og til at finde den totale masse af parametriserede kurver med givne massetætheder. Hvis massetætheden er konstant 1 fås længden (man kan finde længden af en sådan kurve ved at veje den):

Definition 2.10. Længden af den parametriserede kurve

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad , \quad u \in [a, b]$$

defineres som kurveintegralet

$$L(K_{\mathbf{r}}) = \int_{K_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_a^b \|\mathbf{r}'(u)\| du \quad . \quad (2.7)$$

Eksempel 2.11. Det parametriserede cirkelstykke

$$C_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(C_{\mathbf{r}}) &= \int_{C_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 1 \, du = \frac{3\pi}{2} . \end{aligned}$$

Eksempel 2.12. Den parametriserede kurve

$$\tilde{C}_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, 7\pi\right]$$

har længden $L(\tilde{C}_{\mathbf{r}}) = \frac{15\pi}{2}$ svarende til at parametriseringen snor det lange interval flere gange rundt på enhedscirklen!

Eksempel 2.13. Den parametriserede skruelinje

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [-2\pi, 2\pi]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(K_{\mathbf{r}}) &= \int_{K_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2 + 1} \, du \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \, du = 4\pi\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Definition 2.14. Parameterfremstillingen i (2.1) for kurven $K_{\mathbf{r}}$ siges at være en-entydig hvis der for alle $u_1 \in [a, b]$ og for alle $u_2 \in [a, b]$ gælder følgende:

$$u_1 \neq u_2 \quad \text{medfører at} \quad \mathbf{r}(u_1) \neq \mathbf{r}(u_2) . \quad (2.8)$$

Opgave 2.15. Hvilke af parameterfremstillingerne i Figurerne 2.1, 2.2, og 2.3, henholdsvis i eksemplerne 2.11, 2.12, og 2.13, er en-entydige?

Opgave 2.16. Vis, at Definition 2.10 giver samme længde for de tre parametriseringer af linjestykket i Figur 2.1, samme længde af de to cirkelstykker i Figur 2.2 og samme længde af de to skruelinjer i Figur 2.3.

Opgave 2.17. Find længden (med 3 decimaler) af knuden i Figur 2.4.

Opgave 2.18. Find regulære, en-entydige parameterfremstillinger af linjestykket (Figur 2.1), cirklen (Figur 2.2), og skruelinjen (Figur 2.3), således at alle har parameterintervallet $[0, \pi]$.

2.2 Motivering af kurveintegralet

Hvis vi deler intervallet $[a, b]$ i n lige store dele, så har hvert delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og delepunkternes koordinater i $[a, b]$ bliver:

$$\begin{aligned} u_1 &= a, \\ u_2 &= u_1 + \delta_u = a + \delta_u, \\ u_3 &= u_2 + \delta_u = a + 2\delta_u, \\ u_4 &= u_3 + \delta_u = a + 3\delta_u, \\ &\dots \\ b &= u_n + \delta_u = a + n\delta_u \quad . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Med hver af disse fast valgte værdier af u_i som udviklingspunkt kan vi Taylorudvikle hver af de 3 koordinat-funktioner for $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} x(u) &= x(u_i) + x'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_x(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ y(u) &= y(u_i) + y'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_y(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ z(u) &= z(u_i) + z'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_z(u - u_i) \cdot |u - u_i| \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Disse Taylor-udviklinger kan vi samle og udtrykke med vektor-notation således:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) + \underline{\varepsilon}_i(u - u_i) \cdot \rho_i \quad , \tag{2.11}$$

hvor vi bruger den korte skrivemåde $\rho_i = |u - u_i| = \sqrt{(u - u_i)^2}$ for afstanden mellem den variable værdi u og den faste værdi u_i i parameterintervallet. Desuden gælder $\underline{\varepsilon}_i(u - u_i) = (\varepsilon_x(u - u_i), \varepsilon_y(u - u_i), \varepsilon_z(u - u_i)) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ for $u \rightarrow u_i$.

Hvert del-interval $[u_i, u_i + \delta_u]$ afbildes på kurve-stykket $\mathbf{r}(u)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, og dette kurvestykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (2.11), som fås ved at fjerne $\underline{\varepsilon}_i$ -bidraget fra højre side i (2.11):

$$\mathbf{r}_{\text{app}_i}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) \quad , \quad u \in [u_i, u_i + \delta_u] \quad . \tag{2.12}$$

Se Figurerne 2.5 og 2.6 hvor de approksimerende linjestykker er vist for en parametriseret cirkel for to forskellige parametriseringer og for forskellige værdier af n . Det i 'te linjestykke har pr. definition kontakt med kurven i sit ene endepunkt. Det kalder vi kontaktpunktet for linjestykket.

Længde

Hvert enkelt af de i alt n approksimerende linjestykker har en længde. Længden af det i 'te linjestykke er ifølge (2.12)

$$\Delta L_i = \|\mathbf{r}_{\text{app}_i}(u_i + \delta_u) - \mathbf{r}_{\text{app}_i}(u_i)\| = \|\mathbf{r}'(u_i)\| \cdot \delta_u \quad . \tag{2.13}$$

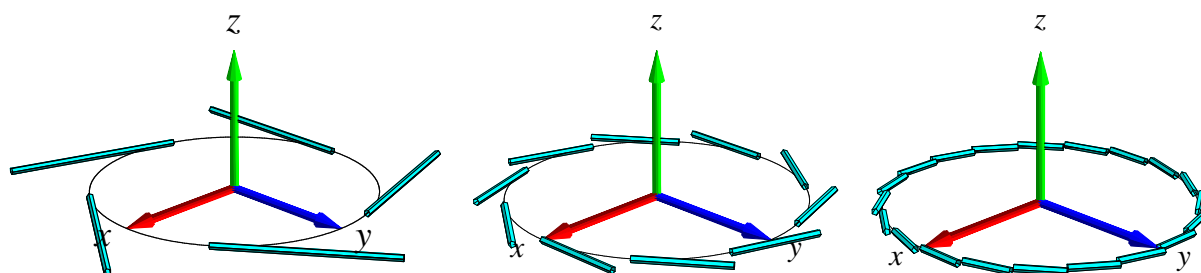
Summen af disse n længder er (for store værdier af n) klart en god approksimation til længden af kurven, således at vi kan skrive

$$L_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}'(u_i)\| \cdot \delta u \quad , \quad (2.14)$$

Da ovenstående sum er en integralsum (se afsnit 1.2) for den kontinuerte funktion $\|\mathbf{r}'(u)\|$ over intervallet $[a, b]$, opnås i grænsen, hvor n går imod uendelig:

$$L_{\text{app}}(n) \rightarrow L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(u)\| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad . \quad (2.15)$$

Vi har dermed motiveret definitionen af længden af en kurve som angivet ovenfor, nemlig som kurveintegralet af den konstante funktion 1 over den parametriserede kurve.



Figur 2.5: Kurven $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), 0)$, $u \in [-1, 1]$, med henholdsvis 5, 10 og 20 approksimerende linjestykker. Det er rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af linjestykker går mod uendelig. Figureerne er del af output fra Integrator3-kommandoen `kurveIntApprox`. Se i afsnit 11 hvordan Integrator3-pakken downloades og anvendes.

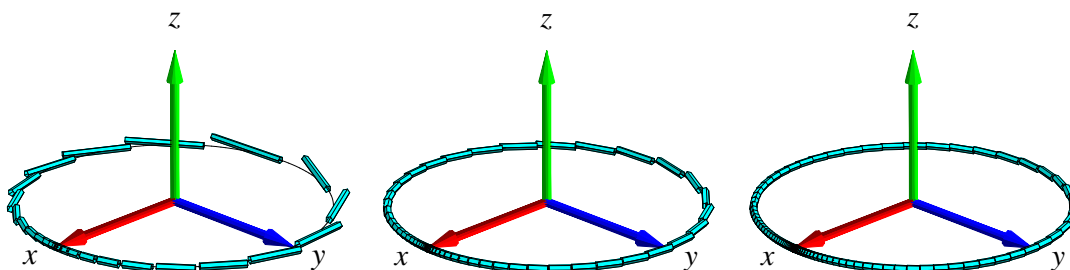
Masse

Hvis vi antager, at hvert enkelt linjestykke i (2.12) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ i linjestykkets kontaktpunkt med kurven, så får vi massen af det i 'te linjestykke:

$$\Delta M_i = f(x(u_i), y(u_i), z(u_i)) \|\mathbf{r}'(u_i)\| \cdot \delta u = f(\mathbf{r}(u_i)) \|\mathbf{r}'(u_i)\| \cdot \delta u \quad .$$

Den totale masse af hele systemet af linjestykker er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele kurven, når kurven tildeles massetætheden $f(\mathbf{r}(u))$ på stedet $\mathbf{r}(u)$:

$$M_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i)) \|\mathbf{r}'(u_i)\| \cdot \delta u \quad . \quad (2.16)$$



Figur 2.6: Kurven $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), 0)$, $u \in [-1, 1]$, med henholdsvis 30, 60 og 100 approksimerende linjestykker. Det er stadig rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af approksimerende linjestykker går mod uendelig. Figureerne er igen del af output fra `kurveIntApprox` - nu anvendt på den nye parameterfremstilling.

Dette er igen en integralsum, men nu for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u)) \|\mathbf{r}'(u)\|$ over intervallet $[a, b]$. Vi får altså i grænsen, hvor n går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n) \rightarrow M = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \|\mathbf{r}'(u)\| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty . \quad (2.17)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en kurve med massetætheden $f(\mathbf{r}(u))$ (for så vidt denne funktion er positiv i $[a, b]$) og dermed den generelle definition af kurveintegralet, Definition 2.7.

2.3 Det tangentielle kurveintegral

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt i rummet (se eventuelt afsnit 8.1). Det *tangentielle kurveintegral* af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs en given parametriseret kurve $K_{\mathbf{r}}$ er kurveintegralet af projektionen (med fortegn) af $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u))$ på kurvens tangent repræsenteret ved $\mathbf{r}'(u)$. Integranden f i kurveintegralet er altså i dette tilfælde givet ved skalarproduktet (prikproduktet)

$$f(\mathbf{r}(u)) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{e}(u) \quad ,$$

hvor $\mathbf{e}(u)$ er defineret ved

$$\mathbf{e}(u) = \begin{cases} \mathbf{r}'(u) / \|\mathbf{r}'(u)\| & \text{hvis } \mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{hvis } \mathbf{r}'(u) = \mathbf{0} \end{cases} .$$

Det tangentielle kurveintegral $\text{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}})$ af \mathbf{V} langs $K_{\mathbf{r}}$ er derfor relativt simpelt at udregne (vi behøver ikke først at finde længden af $\mathbf{r}'(u)$):

$$\begin{aligned}\text{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) &= \int_{K_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} d\mu \\ &= \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{e}(u)) \|\mathbf{r}'(u)\| du \\ &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du \quad .\end{aligned}\tag{2.18}$$

Bemærkning 2.19. Tilsvarende kan man definere det *ortogonale* kurveintegral $\text{Ort}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}})$ af \mathbf{V} langs $K_{\mathbf{r}}$ ved at projicere $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u))$ vinkelret ind på den plan i rummet, som selv står vinkelret på $\mathbf{r}'(u)$ og dernæst finde kurveintegralet af længden af den projektion (som funktion af u).

Bemærkning 2.20. Bemærk, at den sidste integrand i (2.18) er kontinuert når $\mathbf{V}(x, y, z)$ og $\mathbf{r}'(u)$ er kontinuerte selv om det ikke umiddelbart fremgår af definitionen (vektorfeltet $\mathbf{e}(u)$ er jo ikke nødvendigvis kontinuert - medmindre $\mathbf{r}(u)$ er en regulær parameterfremstilling).

Eksempel 2.21. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, z, y)$. Vi ønsker at bestemme det tangentielle kurveintegral af \mathbf{V} langs følgende parametriserede stykke af en skrueelinje

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$

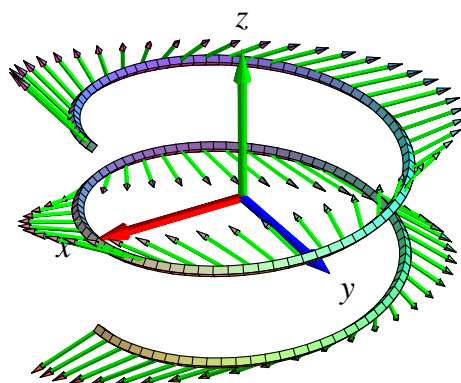
Ved at indsætte i (2.18) fås

$$\begin{aligned}\text{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du \\ &= \int_0^{\pi/2} (0, u, \sin(u)) \cdot (-\sin(u), \cos(u), 1) du \\ &= \int_0^{\pi/2} (u \cos(u) + \sin(u)) du \\ &= [u \sin(u)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad .\end{aligned}$$

Opgave 2.22. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, x, z)$. Bestem både det tangentielle og det ortogonale kurveintegral af \mathbf{V} langs følgende parametriserede stykke af en cirkel

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad .$$

Brug Maple til beregningerne: Hent og brug `kurveInt`-kommandoen fra `Integrator3`-pakken. Se i afsnit 11 hvordan pakken kan downloades og anvendes til formålet.



Figur 2.7: Skruelinjen $\mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), \frac{1}{10}u)$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$ og vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, -(x+y), 2z)$ antydnet langs skruelinjen. Figuren er en del af output fra Integrator3-kommandoen tangKurveInt.

Kapitel 3

Fladeintegraler

3.1 Hvad er en flade?

En parametriseret flade i rummet er givet ved en parameterfremstilling

$$F_{\mathbf{r}}: \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], v \in [c, d]. \quad (3.1)$$

Definition 3.1. Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^3 . Fladeintegralet af funktionen f over den parametriserede flade $F_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv, \quad (3.2)$$

hvor

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| \quad (3.3)$$

er arealet af det parallellogram, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ på fladen.

Definition 3.2. Parameterfremstillingen (3.1) siges at være en regulær parameterfremstilling hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b], v \in [c, d]. \quad (3.4)$$

Definition 3.3. Som for parametriserede kurver siges parameterfremstillingen i (3.1) at være en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

Definition 3.4. Arealet af den parametriserede flade

$$F_{\mathbf{r}}: \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b], v \in [c, d]$$

defineres som fladeintegralet af den konstante funktion 1:

$$A(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv, \quad (3.5)$$

3.2 Motivering af fladeintegralet

Hvis vi ligesom for kurveintegralet deler *begge* intervallerne $[a, b]$ og $[c, d]$ i henholdsvis n og m lige store dele, så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v) -parameterområdet (som jo er rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ i \mathbb{R}^2):

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &= (a, c), \\ (u_1, v_j) &= (a, c + (j - 1)\delta_v), \\ (u_i, v_1) &= (a + (i - 1)\delta_u, c), \\ (u_i, v_j) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v), \\ &\dots \\ (b, d) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v) \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j) som udviklingspunkt kan vi nu som før Taylorudvikle hver af de 3 koordinat-funktioner for $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u_i, v_j) \\ &\quad + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) \\ &\quad + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \\ &\quad + \rho_{ij} \cdot \underline{\epsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_i) \quad , \end{aligned} \tag{3.7}$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Her betegner $\rho_{ij} = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_j)^2}$ afstanden mellem det variable punkt (u, v) og det faste udviklingspunkt (u_i, v_j) i parameterområdet. Der gælder her, at $\underline{\epsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0)$.

Hvert delrektangel $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v]$ afbildes på flade-stykket $\mathbf{r}(u, v)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ og dette fladestykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (3.7), som fås ved at fjerne $\underline{\epsilon}_{ij}$ -bidraget fra højre side i (3.7):

$$\mathbf{r}_{\text{app},ij}(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \quad , \tag{3.8}$$

hvor u og v stadig gennemløber del-intervallerne $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$.

Disse lineære approksimationer er parallellogrammer, som udspringer af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u$ og $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v$. Se Figur 3.1 hvor de approksimerende parallellogrammer er vist for en parametrisering af en kegleflade.

Areal

Hvert enkelt af de ialt nm approksimerende parallellogrammer har et areal. Arealet af det (i, j) 'te parallellogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspringer det pågældende parallellogram:

$$\Delta A_{ij} = \|(\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u) \times (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v)\| = \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \tag{3.9}$$

Opgave 3.5. Bevis denne påstand: Arealet af et parallellogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder parallellogrammet.

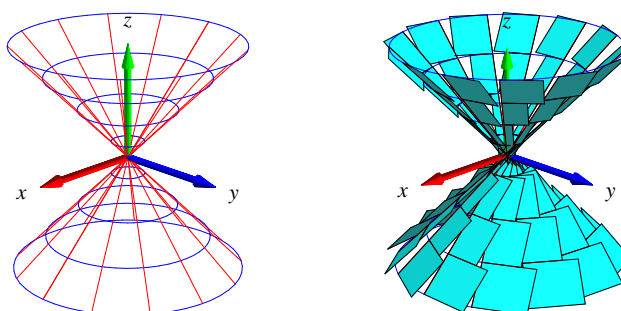
Summen af disse ialt nm arealer er klart en god approksimation til arealet af hele fladestykket, således at vi har

$$A_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (3.10)$$

Da ovenstående sum er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ får vi i grænsen, hvor n og m begge går mod uendelig (se afsnit 1.3):

$$A_{\text{app}}(n, m) \rightarrow A = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty \quad . \quad (3.11)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af arealet af en parametriseret flade som angivet ovenfor, nemlig som fladeintegralet af den konstante funktion 1.

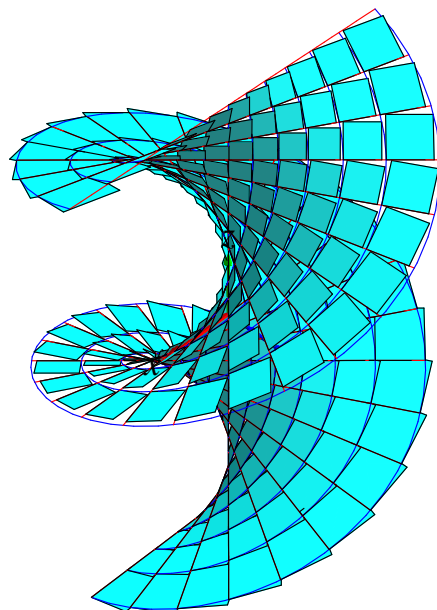


Figur 3.1: Kegle-fladen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Et system af koordinatkurver på fladen er vist til venstre og de tilsvarende areal-approksimerende parallellogrammer er vist til højre. Figurerne er del af output fra Integrator3-kommandoen `fladeInt`.

Opgave 3.6. Vis, at den givne parameterfremstilling i Figur 3.1 hverken er regulær eller entydig. Overvej, om der findes en regulær parameterfremstilling for keglefladen.

Opgave 3.7. Hvorfor er de approksimerende parallellogrammer på den øvre halvdel af keglefladen i Figur 3.1 mindre end de tilsvarende parallellogrammer (med samme afstand til toppunktet) på den nedre halvdel?

Opgave 3.8. Vis, at de approksimerende parallellogrammer til højre i Figur 3.2 alle er kvadrater.



Figur 3.2: Denne vindelflade er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), v)$. Figuren er del af output fra `Integrator3`-kommandoen `fladeInt` og viser en approksimation af fladen med parallellogrammer, som faktisk alle er kvadrater af forskellig størrelse. Se opgave 3.7.

Masse

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallellogram i (3.8) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ i parallellogrammets kontaktpunkt med fladen, så får vi massen af det (i, j) 'te parallellogram :

$$\Delta M_{ij} = f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j), z(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v = f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad .$$

Den totale masse af hele systemet af parallellogrammer er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele fladen når denne gives massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$.

$$M_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (3.12)$$

Dette er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$. Vi får altså i grænsen, hvor n og m går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n, m) \rightarrow M = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty \quad . \quad (3.13)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en parametriseret flade med massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ og dermed også den generelle definition af fladeintegralet, Definition 3.1.

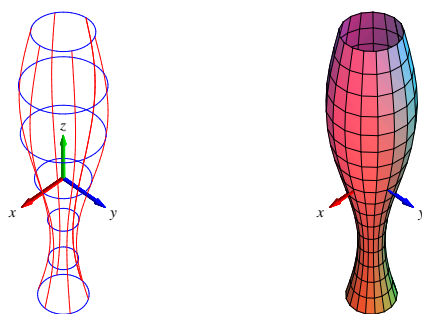
3.3 Omdrejningsflader

Omdrejningsflader er de specielle flader, der fremkommer ved at dreje en plan kurve omkring en ret linje (omdrejningsaksen) som også ligger i samme plan. Kurven kaldes en *generator-kurve* eller en *frembringer-kurve*. Den vaelges typisk i (x, z) -planen og drejes om z -aksen i et (x, y, z) -koordinatsystem. Generator-kurven kan så repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$G_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u) = (g(u), 0, h(u)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad (3.14)$$

hvor $g(u)$ og $h(u)$ er givne funktioner af parameteren u . Den omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje $G_{\mathbf{r}}$ en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$FG_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [-\pi, \pi] \quad . \quad (3.15)$$



Figur 3.3: Omdrejnings-fladen her er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(u)$ og $h(u) = u$. Figureerne er del af output fra fladeInt.

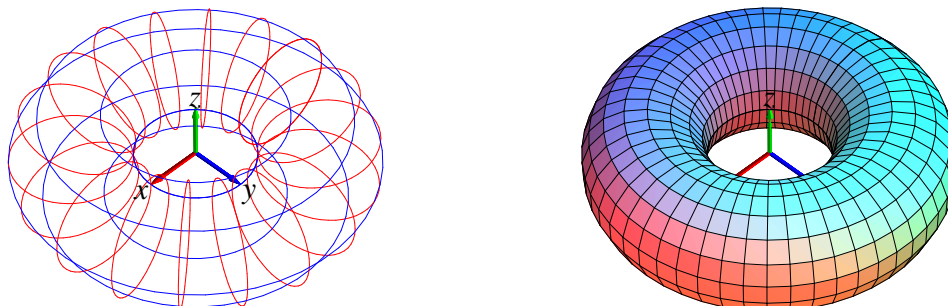
3.4 Det ortogonale fladeintegral, fluxen

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt i rummet. Det *ortogonale fladeintegral* - også kaldet *fluxen* af $\mathbf{V}(x, y, z)$ gennem en given parametriseret flade $F_{\mathbf{r}}$ er fladeintegralet af projektionen (med fortegn) af $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ på fladens normal repræsenteret ved den enhedsvektor, der er proportional med krydsproduktet $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$ (hvor dette er forskelligt fra $\mathbf{0}$). Integranden f i fladeintegralet er da givet ved skalarproduktet (prikproduktet)

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v) \quad ,$$

hvor $\mathbf{n}_F(u, v)$ er defineret ved

$$\mathbf{n}_F(u, v) = \begin{cases} \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) / \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| & \text{hvis } \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{hvis } \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = \mathbf{0} \end{cases}$$



Figur 3.4: Denne torus er omdrejningsfladen givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor nu $g(u) = 2 + \cos(u)$ og $h(u) = \sin(u)$. Figureerne er del af output fra `fladeInt`.

Fluxen af \mathbf{V} gennem $F_{\mathbf{r}}$ er derfor relativt simpel at udregne - vi behøver ikke først at finde længden af $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$ (jævnfør omformningen af det tangentielle kurveintegral):

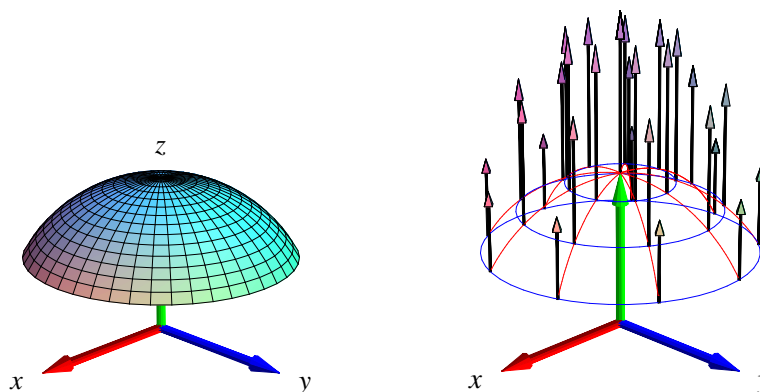
$$\begin{aligned}
 \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) &= \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\
 &= \int_c^d \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) dudv \\
 &= \int_c^d \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v)) \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| dudv \\
 &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) dudv \quad .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Bemærkning 3.9. Tilsvarende kan man definere det *tangentielle* fladeintegral $\text{Tan}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}})$ af \mathbf{V} over fladen $F_{\mathbf{r}}$ ved at projicere $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ vinkelret ind på tangentplanen til $F_{\mathbf{r}}$ (udspændt af $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$) og dernæst at finde fladeintegralet af længden af denne projektion (som funktion af (u, v)).

Bemærkning 3.10. Bemærk igen, at den sidste integrand i (3.16) er kontinuert og dermed integrabel, selv om det ikke umiddelbart fremgår af definitionen, idet vektorfeltet $\mathbf{n}_F(u, v)$ ikke nødvendigvis er kontinuert - medmindre $\mathbf{r}(u, v)$ er en regulær parameterfremstilling.

Opgave 3.11. Bestem det tangentielle fladeintegral for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 0, z)$ langs kuglekalotten i Figur 3.5.

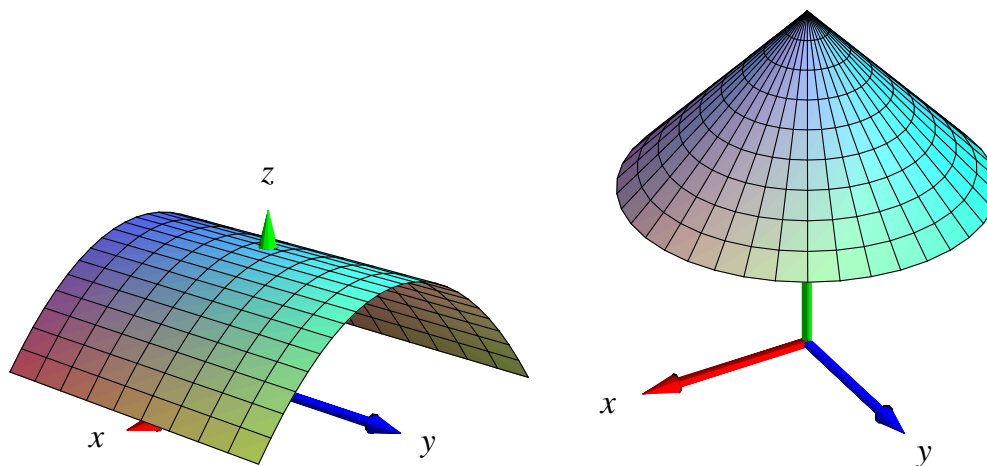
Opgave 3.12. Vis, at parameterfremstillingen i Figur 3.5 hverken er regulær eller en-entydig. Find en regulær og en-entydig parameterfremstilling for kalotten. Vis, at arealet af kalotten er uafhængigt af de valgte parameterfremstillinger.



Figur 3.5: Denne kalot af en kugleflade er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$, $u \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Vektorfeltet er givet ved $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 0, z)$. Et system af koordinatkurver på fladen er vist til højre sammen med vektorfeltet evalueret i koordinatkurvernes skæringspunkter. Figureerne er en del af output fra `fluxInt`-kommandoen anvendt på den givne parameterfremstilling og det givne vektorfelt.

Opgave 3.13. Et solfangertag har form som grafen for funktionen $f(x, y) = 1 - x^2$ over det kvadratiske område $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ i (x, y) -planen i et sædvanligt retvinklet (x, y, z) -koordinatsystem i rummet. Se Figur 3.6 til venstre.

- Lad os – lidt simplificerende – antage, at Solen stråler ind på solfangertaget til et givet 'tidspunkt' t langs det enhedsvektorfelt i rummet, som til tiden t er parallelt med vektoren $(0, -\cos(t), -\sin(t))$ hvor $t \in [0, \pi]$.
 - Solen står altså op til tiden $t = 0$ og sender på det tidspunkt vandrette stråler parallelt med y -aksen i retningen $(0, -1, 0)$. Midt på dagen, til tiden $t = \frac{\pi}{2}$ er strålerne lodrette og parallelle med z -aksen i retningen $(0, 0, -1)$. Til tiden $t = \pi$ går solen ned, men lige før det sker, sender den (næsten) vandrette stråler parallelt med y -aksen i retningen $(0, 1, 0)$.
 - Den energi solfangeren optager pr. arealenhed og pr. tidsenhed på et givet sted antages at være proportional med prikproduktet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ mellem Solstråle-vektorfeltet \mathbf{V} og tagfladens *indadrettede* enhedsnormalvektor \mathbf{n} på stedet.
1. Begrund denne sidste antagelse, og bemærk, at energioptag selvsagt kun kan finde sted hvor omtalte prikprodukt er positiv.
 2. Hvad er solfangerens energioptag pr. tidsenhed?
 3. Hvad er solfangerens totale energioptag på 'en dag'?
 4. Ville det være bedre at orientere taget anderledes, altså dreje hele taget omkring z -aksen med henblik på at forøge det totale dags-energioptag fra Solens indstråling?

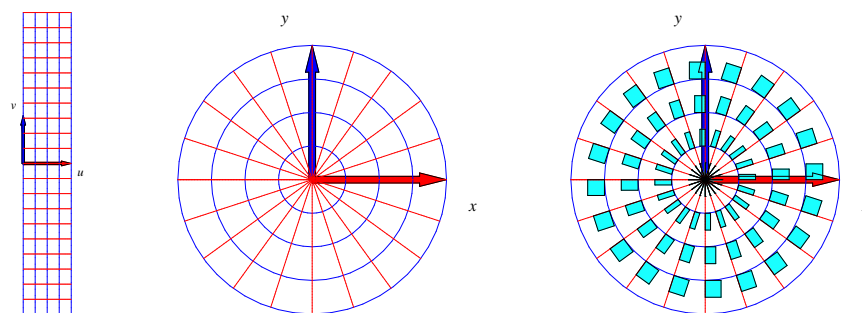


Figur 3.6: Solfangertagene i opgave 3.13.

5. Samme opgaver for det tag, der har form som grafen for funktionen $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ over cirkelskiven med radius 1 og centrum i $(0,0)$ i (x,y) -planen, se Figur 3.6 til højre.

Kapitel 4

Planintegraler



Figur 4.1: Dette område i planen er givet ved følgende parameterfremstilling, der repræsenterer *polære koordinater* i planen: $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Figureerne er del af output fra `planIntApprox`-kommandoen. Parameterrektanglet ses til venstre. Den deformeres og afbildes (ved brug af \mathbf{r}) på det plane område i midten. Til højre er antydnet placeringen og størrelsen (pånær en faktor 4) af de til det givne net hørende approksimerende parallellogrammer (her: rektangler).

4.1 Hvad er et område i planen?

Et plant område kan betragtes som en flade, der ligger helt i en plan, f.eks. i (x, y) -planen. Planintegraler er derfor fladeintegraler. Specifikt har vi derfor også direkte følgende motiverede definitioner:

Et parametriseret område i planen er givet ved en parameterfremstilling

$$P_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (4.1)$$

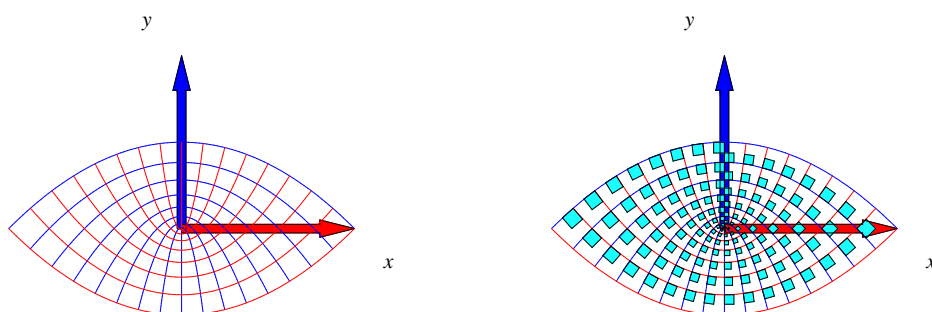
Definition 4.1. Lad $f(x, y)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^2 . Planintegralet af funktionen f over det parametriserede område $P_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv, \quad (4.2)$$

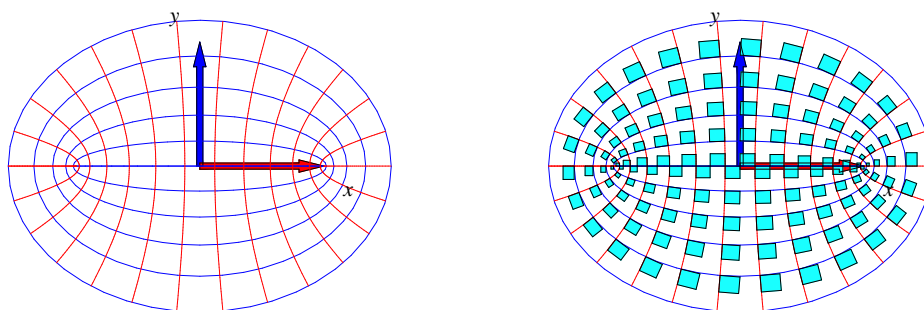
hvor

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = \|\mathbf{r}'_u(u, v)\| \|\mathbf{r}'_v(u, v)\| \sin(\theta(u, v)) \quad (4.3)$$

er arealet af det parallellogram i planen, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ i planen (funktionen $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ betegner vinklen mellem disse tangentvektorer).



Figur 4.2: Parabellkoordinater. Dette område i planen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 1]$. Figuren til højre antyder igen et system af areal-approksimerende parallellogrammer. Figurerne er del af output fra `planIntApprox`-kommandoen.



Figur 4.3: Elliptiske koordinater. Dette område er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Figurerne er del af output fra `planIntApprox`-kommandoen.

Definition 4.2. *Parameterfremstillingen (4.1) siges at være en regulær parameterfremstilling for det plane område hvis der gælder følgende:*

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b], v \in [c, d] \quad . \quad (4.4)$$

Definition 4.3. *Som for parametriserede flader siges parameterfremstillingen i (4.1) at være en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden i planen.*

Opgave 4.4. Vis, at $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ (i (4.4)) også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der som søjler har koordinaterne for de to vektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$.

Kapitel 5

Rumintegraler

5.1 Hvad er et rumligt område?

Et parametriseret rumligt område er på samme måde som kurver og flader givet ved en parameterfremstilling, nu med følgende form

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3, \quad (5.1)$$
$$u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [h, l].$$

Definition 5.1. Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion på \mathbb{R}^3 . Rumintegralet af funktionen f over det parametriserede rumlige område $\Omega_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw, \quad \text{hvor} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) &= |[\mathbf{r}'_u(u, v, w), \mathbf{r}'_v(u, v, w), \mathbf{r}'_w(u, v, w)]| \\ &= |(\mathbf{r}'_u(u, v, w) \times \mathbf{r}'_v(u, v, w)) \cdot \mathbf{r}'_w(u, v, w)| \end{aligned} \quad (5.3)$$

er volumenet (her beregnet som et rumprodukt) af det parallelepipedum, der på stedet $\mathbf{r}(u, v, w)$ udspændes af de tre koordinatkurve-tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

Opgave 5.2. Vis, at $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der som søjler har koordinaterne for de tre vektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

Bemærkning 5.3. Parameterfremstillingen i (5.1) kaldes en *regulær parameterfremstilling* hvis $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) > 0$ for alle $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, $w \in [h, l]$.

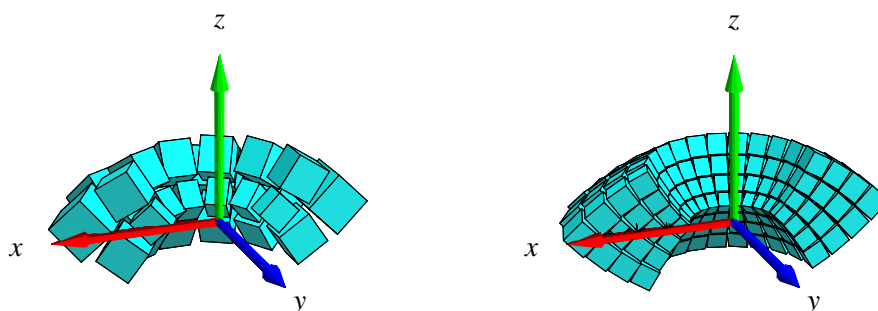
Definition 5.4. Som for kurver og flader vil vi kalde parameterfremstillingen i (5.1) *en-entydig* hvis forskellige punkter i definitionsområdet afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

Definition 5.5. Volumenet af det rumlige område

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad , \quad u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [h, l]$$

defineres som rumintegralet af den konstante funktion 1:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw \quad . \quad (5.4)$$



Figur 5.1: Billeder af det rumlige område givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (uv\cos(w), uv\sin(w), \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v \in [\frac{1}{2}, 1]$, $w \in [\pi, 2\pi]$. Figureerne viser to systemer af volumen-approksimerende parallellepida. Figureerne er del af output fra `rumInt`-kommandoen.

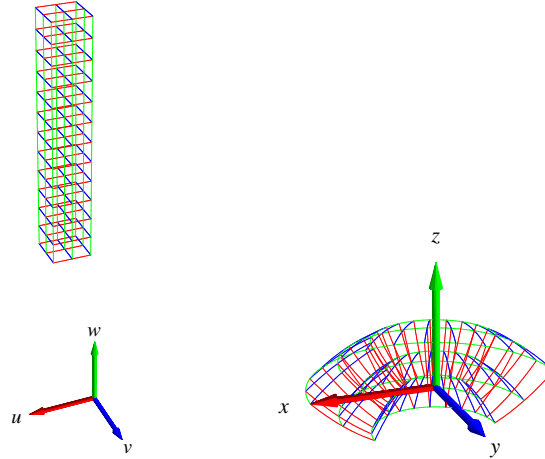
Opgave 5.6. Vis, at parameterfremstillingen i Figur 5.1 er regulær og en-entydig.

5.2 Motivering af rumintegralet

Intervallerne $[a, b]$, $[c, d]$ og $[h, l]$ inddeles i henholdsvis n , m og q lige store dele. Så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$, hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$ og hvert w -interval har længden $\delta_w = (l - h)/q$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v, w) -parameterområdet (som her er det retvinklede kasse-område $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ i \mathbb{R}^3 , se Figur 5.2):

$$\begin{aligned} (u_1, v_1, w_1) &= (a, c, h), \\ &\dots \\ (u_i, v_j, w_k) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v, h + (k - 1)\delta_w), \\ &\dots \\ (b, d, l) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v, h + q\delta_w) \quad . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j, w_k) som udviklingspunkt kan vi igen Taylor-udvikle hver af de 3 koordinat-funktioner for $\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ til første orden



Figur 5.2: Det rumlige område i Figur 5.1 opnås ved at vektorafbildningen \mathbf{r} deformerer (u, v, w) -parameterkassen (til venstre) ind i (x, y, z) -rummet (som vist til højre). Forskriften for deformationen er netop givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (uv \cos(w), uv \sin(w), \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v \in [\frac{1}{2}, 1]$, $w \in [\pi, 2\pi]$.

og med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v, w) &= \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\
 &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\
 &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\
 &+ \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) \\
 &+ \rho_{ijk} \cdot \underline{\epsilon}_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \quad ,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$. Afstanden mellem det variable punkt (u, v, w) og det faste punkt (u_i, v_j, w_k) i parameterområdet betegnes med ρ_{ijk} og vi har som før $\underline{\epsilon}_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Hvert parameter-delområde eller delkasse $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v] \times [w_k, w_k + \delta_w]$ afbildes på det rumlige billed-område $\mathbf{r}(u, v, w)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$ i billedrummet og dette område kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (5.6), som fås ved at fjerne $\underline{\epsilon}_{ijk}$ -bidraget fra højre side i (5.6):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{\text{app}_{ijk}}(u, v, w) &= \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\
 &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\
 &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\
 &+ \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) \quad ,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

hvor vi stadig har at $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$.

Disse lineære rumlige approksimationer er parallelepipida, som udspændes af de tre tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u$, $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v$ og $\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w$.

Volumen

Hvert enkelt af de ialt nmq approksimerende parallelepipida har et volumen. Volumenet af det (i, j, k) 'te parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre vektorer, der udspænder det pågældende parallelepipedum:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Vol}_{ijk} &= |[\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u, (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v), (\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w)]| \\ &= \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Opgave 5.7. Bevis denne påstand: Volumenet af et parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre udspændende vektorer.

Summen af de ialt nmq volumener er en god approksimation til volumenet af hele det rumlige område, således at vi har

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Vol}_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da ovenstående sum er en tredobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ får vi i grænsen, hvor n, m og q alle går mod uendelig:

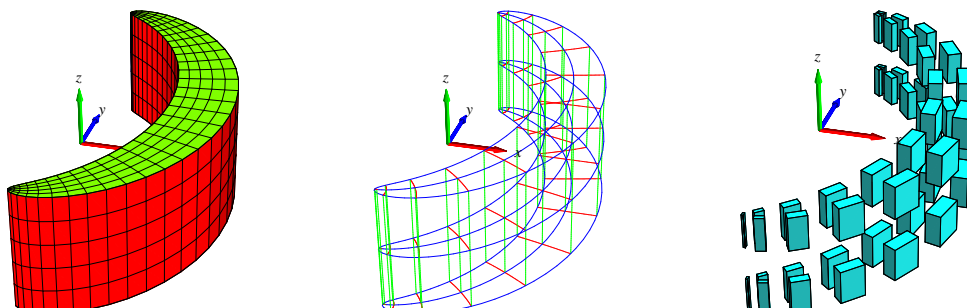
$$\text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) \rightarrow \text{Vol} = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \quad \text{for } n, m, q \rightarrow \infty \quad . \quad (5.10)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af volumenet af et parametriseret område i rummet som angivet ovenfor, nemlig som rumintegralet af den konstante funktion 1.

Masse

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelepipedum givet ved (5.7) tildeles en konstant massetæthed som er givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ på stedet $\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)$, så bliver massen af det (i, j, k) 'te parallelepipedum:

$$\begin{aligned} \Delta M_{ijk} &= f(x(u_i, v_j, w_k), y(u_i, v_j, w_k), z(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (5.11)$$



Figur 5.3: Dette rumlige område er defineret ved hjælp af såkaldte *Maxwell-Cylinderkoordinater*. Parameterfremstillingen for området er følgende: $\mathbf{r}(u, v, w) = (1 + u + \exp(u) \cos(v), v + \exp(u) \sin(v), w)$, $u \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $v \in [-\pi, \pi]$, $w \in [-1, 1]$. Figureerne er konstruerede med `rumIntApprox`-kommandoen.

Den totale masse af hele systemet af approksimerende parallellepipida er derfor følgende, som nødvendigvis er en god approksimation til massen af hele det rumlige område:

$$\begin{aligned} M_{\text{app}}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dette er en tredobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$. Vi får i grænsen, hvor n, m og q går mod uendelig:

$$\begin{aligned} M_{\text{app}}(n, m, q) \rightarrow M &= \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \\ \text{for } n, m, q \rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af et parametriseret område med massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v, w))$ og dermed også den generelle Definition 5.1 af rumintegralet.

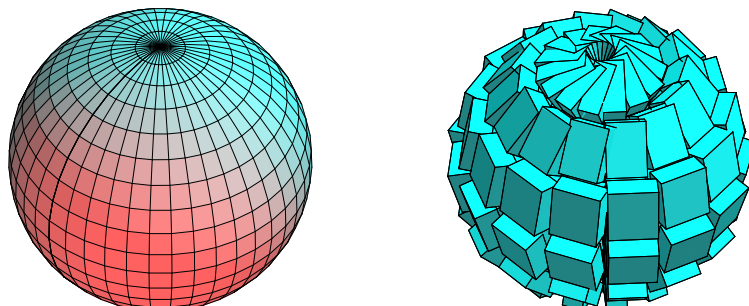
Opgave 5.8. I Figur 5.4 betragtes følgende parametrisering af et rumligt område:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v)) \quad , \quad u \in [1, 2] \quad , \quad v \in [0, \pi] \quad , \quad w \in [-\pi, \pi] \quad .$$

Ved afbildning af det kasseformede parameterområde forventes ialt 6 sideflader for billed-mængden. Vi ser på figuren kun een af de 6 sideflader. Hvor er de andre og hvordan ser de ud?

5.3 Omdrejningslegemer

Omdrejningslegemer er de specielle rumlige områder, der fremkommer ved at dreje et plant område (f.eks. defineret i (x, z) -planen) omkring en akse i samme plan (z -aksen). Jævnfør definitionen af omdrejningsflader i afsnit 3.3.



Figur 5.4: Dette *rumlige* område er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [1, 2]$, $v \in [0, \pi]$, $w \in [-\pi, \pi]$. Koordinatkurverne på en af de afgrænsende sideflader er vist til venstre og et system af volumen-approksimerende parallelepipida er vist til højre. Figureerne er konstruerede med `rumInt`-kommandoen.

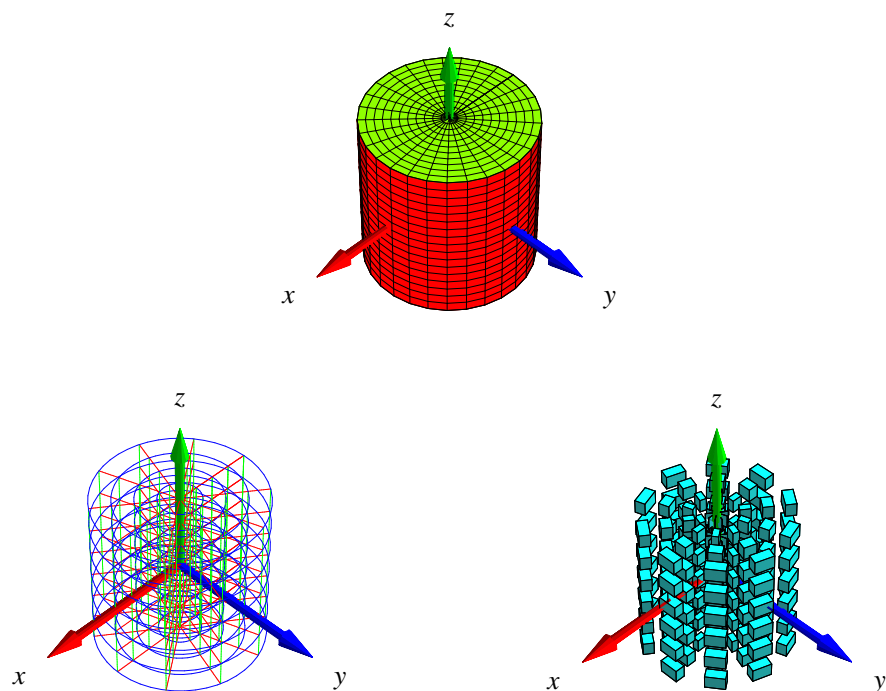
Det plane område repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (g(u, v), 0, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], v \in [c, d], \quad (5.14)$$

hvor $g(u, v)$ og $h(u, v)$ er givne funktioner af parametrene u og v . Den flade, der fremkommer ved at dreje $G_{\mathbf{r}}$ en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$\Omega P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad (5.15) \\ u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [-\pi, \pi].$$

Figur 5.1 viser halvdelen af et omdrejningslegeme. Figur 5.4 viser overfladen af et omdrejningslegeme defineret ved brug af kuglekoordinater. Cylinder-koordinater i rummet giver tilsvarende velkendte omdrejningslegemer som f.eks. det, der er vist i Figur 5.5.



Figur 5.5: Cylinderkoordinater. Dette rumlige område er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v))$, $u \in [0, \frac{1}{2}]$, $v \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $w \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u, v) = u$ og $h(u, v) = v$. Figureerne er konstruerede med `rumIntApprox`-kommandoen.

Kapitel 6

Massemidtpunkter

6.1 Hvad er et massemidtpunkt?

Lad $L_{\mathbf{r}}$ betegne enten en parametriseret kurve $K_{\mathbf{r}}$ eller flade $F_{\mathbf{r}}$ eller et parametriseret område $\Omega_{\mathbf{r}}$ i rummet med en given vægtfunktion (massetæthed) $f = f(x, y, z)$.

Definition 6.1. Massemidtpunktet C_m af $L_{\mathbf{r}}$ med massetæthedsfunktion $f = f(x, y, z)$ defineres som det punkt i rummet, der har følgende koordinater med hensyn til et sædvanligt retvinklet $\{x, y, z\}$ -koordinatsystem:

$$C_m(L_{\mathbf{r}}, f) = \frac{1}{M} \left(\int_{L_{\mathbf{r}}} x \cdot f \, d\mu, \int_{L_{\mathbf{r}}} y \cdot f \, d\mu, \int_{L_{\mathbf{r}}} z \cdot f \, d\mu \right) \quad , \quad (6.1)$$

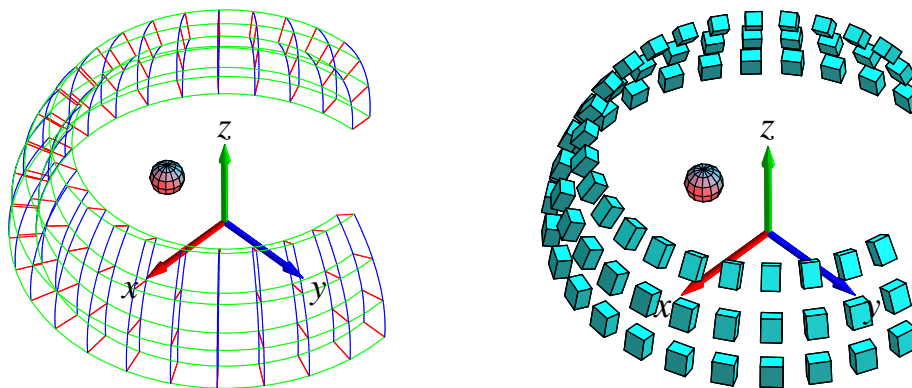
hvor M betegner den totale masse af $L_{\mathbf{r}}$:

$$M = \int_{L_{\mathbf{r}}} f \, d\mu \quad . \quad (6.2)$$

Specielt for et rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}$, som er givet ved en parameterfremstilling af formen (5.1), får vi derfor følgende udtryk for beregning af massemidtpunktets koordinater. Hvis vi betegner koordinaterne med $C_m(\Omega_{\mathbf{r}}, f) = (C_1, C_2, C_3)$ har vi:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{M} \int_h^l \int_c^d \int_a^b x(u, v, w) f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, dudvdw \quad , \\ C_2 &= \frac{1}{M} \int_h^l \int_c^d \int_a^b y(u, v, w) f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, dudvdw \quad , \\ C_3 &= \frac{1}{M} \int_h^l \int_c^d \int_a^b z(u, v, w) f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, dudvdw \quad , \quad \text{hvor} \\ M &= \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, dudvdw \quad . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ved beregning af massemidtpunkter kan man ofte med fordel benytte hjælpemidler som Maple. Kommandoen `rumCm` fra `Integrator3`-pakken (eller tilsvarende `kurveCm`, `planCm`, `fladeCm`, henholdsvis) beregner massemidtpunkter og viser deres placeringer i forhold til det aktuelt givne vægtede objekt; se eksempelvis Figureerne 6.1 og 6.2.



Figur 6.1: Det her viste rumlige område er givet ved følgende parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [\frac{7}{4}, 2]$, $v \in [2\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}]$, $w \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$. Figureerne viser massemidtpunktet for en afskåret kuglekalot. Vægtfunktionen er konstant $f(x, y, z) = 1$. Til højre ses en antydning af et system af approksimerende parallellepipida. De er ensfarvede fordi vægtfunktionen her er konstant. Figureerne er output fra `rumCm`-kommandoen.

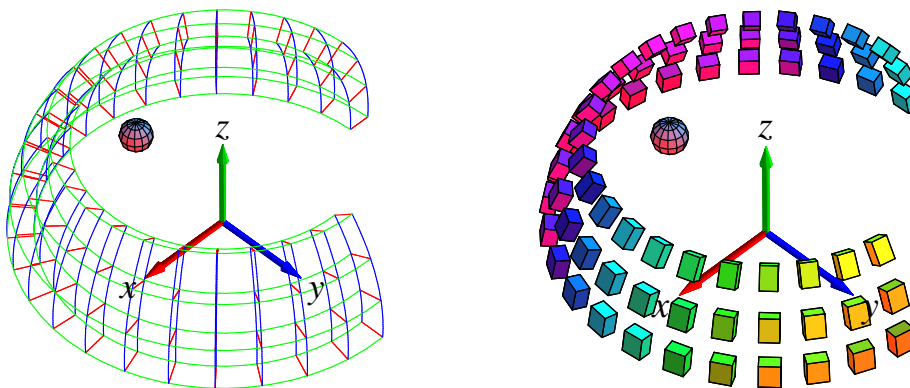
Definition 6.2. Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et parametriseret rumligt område med en given vægtfunktion (massetæthed) $f = f(x, y, z)$. Lad $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et vektorfelt i rummet. Det totale kraftmoment af \mathbf{V} på $\Omega_{\mathbf{r}}$ omkring et punkt p (med stedvektoren \mathbf{r}_p) defineres ved :

$$\begin{aligned} \mathbf{Km}(\Omega_{\mathbf{r}}, f, \mathbf{V}, p) &= \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{V} d\mu \\ &= \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) (\mathbf{r}(u, v, w) - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Bemærkning 6.3. Kraftmomentet \mathbf{Km} er en vektor fordi integranden i (6.4) er et vektorielt krydsprodukt. Integralet skal altså forstås således, at hver enkelt af de tre koordinatfunktioner for integranden skal integreres over det rumlige område.

Opgave 6.4. Antag, at $f = 1$ og lad \mathbf{V} betegne en vilkårlig konstant vektor, $\mathbf{V}(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Antag yderligere, at punktet p vælges i massemidtpunktet for et givet rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}$. Vis, at under disse forudsætninger gælder: $\mathbf{Km} = \mathbf{0}$. Gælder dette også (uafhængigt af α, β, γ) hvis f ikke er en konstant funktion? Gælder det for andre punkter p end massemidtpunktet?

Opgave 6.5. Benyt resultatet i ovenstående opgave til at forklare vægtstangs-princippet: Betragt en iøvrigt vægtløs og retlinet vippe med total længde L i det sædvanlige konstante tyngdefelt. Antag at vippen er understøttet i et omdrejningspunkt på midten. Vi placerer så en masse m_1 på vippen i afstanden r_1 til højre for omdrejningspunktet og en masse m_2 i afstanden r_2 til venstre for omdrejningspunktet. Så er systemet i ligevægt - uanset hvilken vinkel vippen danner med vandret - hvis der gælder følgende: $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Hvor skal masserne placeres for at opnå ligevægt (hvis



Figur 6.2: Det rumlige område givet ved parameterfremstillingen (jvf. figur 6.1): $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [\frac{7}{4}, 2]$, $v \in [2\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}]$, $w \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$. Figureerne viser igen massemidtpunktet for den massive kuglekalot-afskæring. Men vægtningen er her givet ved massetæthedsfunktionen $f(x, y, z) = 1 - \frac{1}{2}y$, således at massemidtpunktet er tydeligt forskudt i forhold til den homogene, konstante vægtning i forrige figur. Til højre ses igen en antydning af et system af approksimerende parallellepipida. De er her farvede for at antyde den tilsvarende vægtfordeling. Figureerne er output fra rumCm.

muligt?) når vippen ikke er vægtløs men har en masse-tæthed givet ved en funktion $f = f(u)$, hvor $u \in [0, L]$ betegner afstanden fra vippens venstre endepunkt? Hvad sker der hvis vippen er meget lang, f.eks. $L = 14387$ km, således at tyngdekraft-vektorfeltet ikke længere kan regnes konstant?

Kapitel 7

Inertimomenter

7.1 Hvad er et inertimoment?

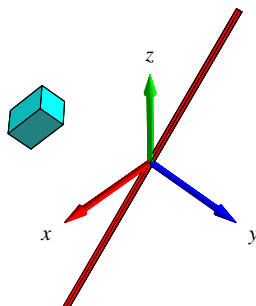
Antag, at vi roterer en lille partikel med masse ΔM omkring en akse ℓ med konstant vinkelhastighed ω således at partiklen udfører en cirkelbevægelse i den plan, som står vinkelret på ℓ og således at centrum for cirkelbevægelsen ligger på ℓ - se Figur 23. Så er den kinetiske energi i bevægelsen givet ved $E_{kin} = \frac{1}{2}\Delta M v^2$, hvor v er den konstante fart i cirkelbevægelsen. Men denne fart er netop vinkelhastigheden gange cirkelens radius, dvs. $v = \omega \text{dist}_\ell$, hvor dist_ℓ betegner afstanden fra partiklen til aksens. Heraf følger: $E_{kin} = \frac{1}{2}\omega^2 \Delta M \text{dist}_\ell^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \text{Im}(\Delta M, \ell)$, hvor vi dermed har indført betegnelsen $\text{Im}(\Delta M, \ell)$ for produktet $\Delta M \text{dist}_\ell^2$. Størrelsen kaldes *inertimomentet* af partiklen i forhold til den givne akse og er altså (pånær faktoren $\frac{1}{2}$) et udtryk for energien af partiklen når denne roteres med enheds-vinkelhastighed omkring aksens. For hvert enkelt parallelepipedum i en given (n, m, q) -approximation til et givet rumligt område med vægtfunktion $f(x, y, z)$ fås massen ΔM_{ijk} fra (5.11) og dermed bidraget $\text{Im}(\Delta M_{ijk}, \ell)$ til det approksimerede inertimoment for hele det rumlige område. Det totale inertimoment af det rumlige område i forhold til en fast akse fås dernæst på den nu velkendte måde ved at summere alle bidragene i approximationen og til sidst betragte grænsen $n, m, q \rightarrow \infty$:

Definition 7.1. Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et parametriseret rumligt område og lad $f = f(x, y, z)$ være en (positiv) masse-tæthedsfunktion. Lad endvidere ℓ betegne en ret linje i rummet. Inertimomentet af det f -vægtede område $\Omega_{\mathbf{r}}$ i forhold til aksens ℓ er så givet ved:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Omega_{\mathbf{r}}, f, \ell) &= \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f \text{dist}_\ell^2 d\mu \\ &= \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{dist}_\ell^2(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw \end{aligned} \quad (7.1)$$

Der gælder følgende bemærkelsesværdige sætning om inertimomenter.

Sætning 7.2 (Steiner's parallelakse-sætning). Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et f -vægtet rumligt område med den totale vægt M (jvf. (6.3)), og lad ℓ_p være en fast valgt akse gennem punktet p . Lad dernæst



Figur 7.1: En enkelt masse-del roteres med konstant vinkelhastighed om en akse. Energien i bevægelsen (og dermed inertimomentet af massedelen i forhold til akse) er proportional med kvadratet på afstanden til akse. Output fra `rumIm`-kommandoen.

ℓ_{C_m} betegne den akse, som er parallel med ℓ_p men som går gennem massemidtpunktet $C_m(\Omega_r, f)$ og lad D betegne afstanden mellem de to akser. Så gælder følgende identitet:

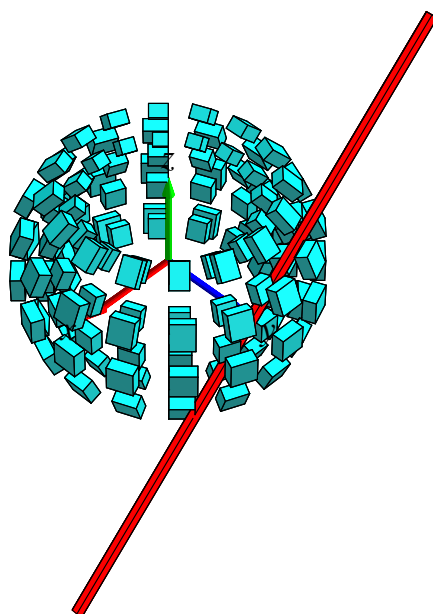
$$\text{Im}(\Omega_r, f, \ell_p) = \text{Im}(\Omega_r, f, \ell_{C_m}) + D^2 M \quad . \quad (7.2)$$

Opgave 7.3. Bevis (eller find, læs og forstå i litteraturen et argument for) Steiner's parallelakse-sætning. Se i [Int3] under `Int3F_Steiner.mws` hvordan `Integrator3`-kommandoerne kan benyttes til at verificere Steiner's sætning i konkrete tilfælde.

Opgave 7.4. Benyt Steiner's sætning til at vise følgende: For et givet f -vægtet rumligt område Ω_r antager $\text{Im}(\Omega_r, f, \ell)$ sin mindste værdi for en akse ℓ , der går igennem massemidtpunktet $C_m(\Omega_r, f)$.

Opgave 7.5. Benyt `Integrator3`-pakkens kommandoer `kurveIm`, `fladeIm`, `rumIm` til beregning af inertimomenterne af en tynd stang, et rektangel, en cirkelskive, en cylinder, en massiv kasse og en massiv kugleflade, henholdsvis (vælg selv dimensionerne). Vægtfunktionen f antages evt. konstant; omdrejningsaksen kan vælges som en symmetriakse. Find de tilsvarende beregninger i litteraturen og sammenlign resultaterne.

Opgave 7.6. Lad Ω_r betegne en homogen massiv retvinklet kasse med vægtfunktion $f(x, y, z) = 1$ og sidelængderne 1, 1 og 2. Vis, at der findes et punkt p i rummet, således at inertimomentet $\text{Im}(\Omega_r, f, \ell_p)$ antager den samme værdi for alle valg af akser ℓ_p gennem p . Se og brug eksempelvis `Int3E_Inertimomenter.mws`.



Figur 7.2: En del af en massiv kugle-skal roteres om en akse. Figuren viser placeringer af de approksimerende parallellepipida i forhold til aksens. Inertimomentet approksimeres af summen af de enkelte deles inertimomenter. Figuren og det eksakte inertimoment af kugleskallen kan beregnes med `rumIm`-kommandoen.

Kapitel 8

Vektorfelter og deres flowkurver

8.1 Hvad er et vektorfelt?

Et vektorfelt \mathbf{V} i rummet er givet ved 3 funktioner $V_1(x, y, z)$, $V_2(x, y, z)$ og $V_3(x, y, z)$ således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z)) \quad \text{for } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad .$$

Nogle vektorfelter er særlig simple; for eksempel de vektorfelter hvor alle 3 koordinatfunktioner er 1.grads polynomier i de rumlige variable (x, y, z) , dvs.

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3) \quad . \quad (8.1)$$

I så fald kan vektorfeltet skrives kort ved hjælp af den matrix, \mathbf{A} , der har elementerne a_{ij} og den vektor, \mathbf{b} , der har koordinaterne b_i :

Definition 8.1. Et vektorfelt af første grad er et vektorfelt, der kan skrives på følgende form ved hjælp af en konstant matrix \mathbf{A} og en konstant vektor \mathbf{b} :

$$\mathbf{V}(x, y, z)^T = \mathbf{A}[x \ y \ z]^T + \mathbf{b}^T \quad , \quad (8.2)$$

hvor T betyder transponering af de respektive koordinatmatricer.

Eksempel 8.2. Et konstant vektorfelt, som for eksempel en konstant vind lokalt tæt ved jordoverfladen, er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{b} \quad , \quad (8.3)$$

hvor \mathbf{b} er en konstant vektor, f.eks. $\mathbf{b} = (0, 7, 0)$.

Eksempel 8.3. Et eksempel på et såkaldt rotationsvektorfelt er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1) \quad . \quad (8.4)$$

Prøv at plote vektorfeltet med Maple. Kommandoen er: `fieldplot3d`.

Opgave 8.4. Find \mathbf{A} og \mathbf{b} for vektorfeltet i ovenstående eksempel. Hvad er sporet af \mathbf{A} ? Kan \mathbf{A} diagonaliseres?

Eksempel 8.5. Et eksempel på hvad vi kunne kalde et eksplosionsvektorfelt er givet ved

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z) \quad . \quad (8.5)$$

Prøv at plotte vektorfeltet med Maple.

Opgave 8.6. Find \mathbf{A} og \mathbf{b} for vektorfeltet i ovenstående eksempel 8.5. Hvad er sporet af \mathbf{A} ? Kan \mathbf{A} diagonaliseres?

Vi vil nu kort begrunde de (dynamiske) navne, som vi har givet vektorfelterne i ovenstående eksempler.

8.2 Flowkurver for et vektorfelt

Lad os først repetere fra afsnit 2, at hvis vi har givet en kurve med en parameterfremstilling således

$$K_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad t \in [a, b] \quad ,$$

så giver denne kurve anledning til et ganske bestemt vektorfelt *langs med kurven*, nemlig hastighedsvektorfeltet (tangentvektorfeltet) $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Det oplagte *omvendte* spørgsmål er nu: Givet et startpunkt $p = (x_0, y_0, z_0)$ og givet et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ i rummet, findes der da en parametriseret kurve $\mathbf{r}(t)$ igennem p (med $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$), således at kurvens tangentvektorfelt hele vejen *langs med kurven* netop er det givne vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ *langs med kurven*? Hvis det er tilfældet vil vi kalde kurven $\mathbf{r}(t)$ en integralkurve eller en flowkurve for vektorfeltet. Disse navne skyldes dels at kurven findes ved integration (løsning af et differentiallygningsystem) og dels at bevægelsen langs kurven er som at flyve med det givne vektorfelt, altså med en fart og en retning, som vektorfeltet angiver på ethvert sted for bevægelsen.

Der gælder nu følgende fundamentale sætning.

Sætning 8.7. Givet et 1. grads vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ i rummet. Lad (x_0, y_0, z_0) betegne et vilkårligt punkt i rummet. Så findes der netop én kurve $\mathbf{r}(u)$, der opfylder de to betingelser:

$$\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0) \text{ og } \mathbf{r}'(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) \text{ for alle } t \in [-\infty, \infty].$$

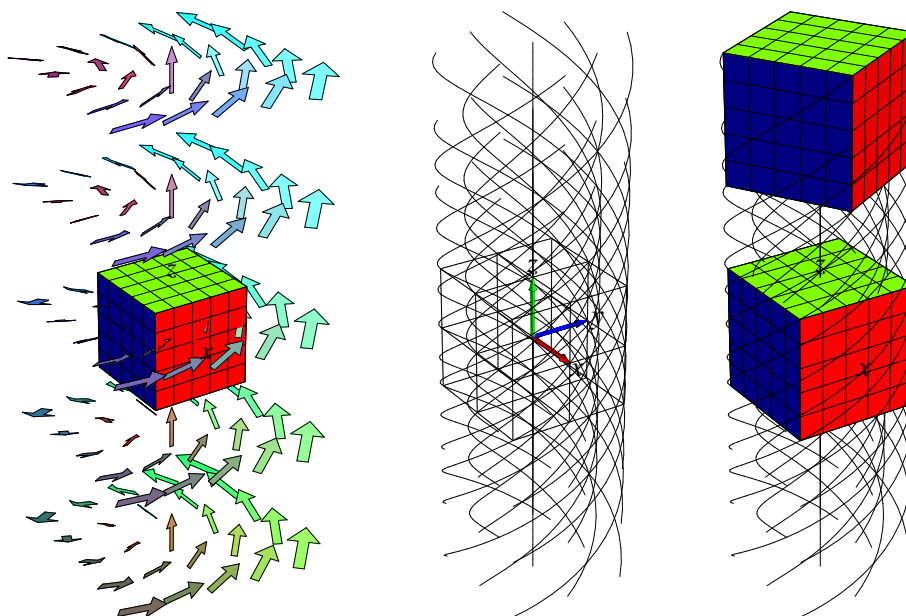
Hvis vi har givet et vektorfelt af 1. grad, så kan vi altså fylde hele rummet med flowkurver, som hver for sig er definerede for alle værdier af de respektive parametre t , og som ikke skærer hinanden.

Bemærkning 8.8. Sætningen kan udvides til vektorfelter der ikke nødvendigvis er af 1. grad, men så er det ikke længere sikkert, at alle parameterintervallerne for flowkurverne er hele det dobbeltuendelige interval $[-\infty, \infty]$.

Begrundelsen, beviset, for sætning 8.7 er kendt fra systemer af lineære koblede differential-ligninger. Lad os kort repetere ved at se på flowkurverne for de 3 eksempler ovenfor.

Eksempel 8.9. Det konstante vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 7, 0)$ har flowkurver $(x(t), y(t), z(t))$ som skal opfylde de to betingelser: Begyndelsebetingelsen $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ og de 3 differentiallyigninger for $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$, som følger af hastighedsvektor-betingelsen $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)) = (0, 7, 0)$. De 3 differentiallyigninger er ikke koblede i dette tilfælde og de løses direkte med de angivne begyndelsebetingelser med følgende resultat: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0 + 7t$, og $z(t) = z_0$. Dvs. flowkurverne er (ikke overraskende) alle de rette linjer parallelle med y-aksen, parametriseret sådan at alle har farten 7.

Eksempel 8.10. Eksemplet med rotationsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$ har tilsvarende flowkurver, der nu tilfredsstillter betingelserne: $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ samt differentiallyigningerne $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-y(t), x(t), 1)$. Differentiallyigningerne for $x(t)$ og $y(t)$ er koblede lineære differentiallyigninger med konstante koefficienter og løses præcis som i [LA] afsnit 7.4. Bemærk, at systemmatricen allerede er fundet i opgave 8.4. Resultatet er $x(t) = x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)$, $y(t) = x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)$, og $z(t) = z_0 + t$. Disse flowkurver kan findes og inspiceres med Integrator3-kommandoen `rumFlow` som vist i filen `Int3C_Rum.mws`. Det fremgår også deraf at det er ganske rimeligt, at kalde vektorfeltet et rotationsvektorfelt. Se Figur 8.1.



Figur 8.1: Rotationsvektorfeltet fra eksempel 8.10 sammen med de integralkurver, som går igennem en terning. I `Int3C_Rum.mws` findes en animation med kommandoen `rumFlow`, der blandt andet viser, hvordan terningen roteres, når hvert enkelt punkt følger sin flowkurve.

Opgave 8.11. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ og benyt `rumFlow` til at finde flowkurver og bevægelsen af samme terning som i Figur 8.1 når tidsintervallet for flowet sættes til $T = [0, 2\pi]$. Sammenlign dernæst med 'virkningen' af vektorfeltet $\mathbf{W}(x, y, z) = (-y, 2x, 0)$ på terningen i samme tidsinterval. Forklar forskellene på de to 'virkninger' af de to forskellige vektorfelter.

Eksempel 8.12. Eksplosionsvektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$$

har flowkurver, der tilfredsstiller:

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

og differentialligningerne

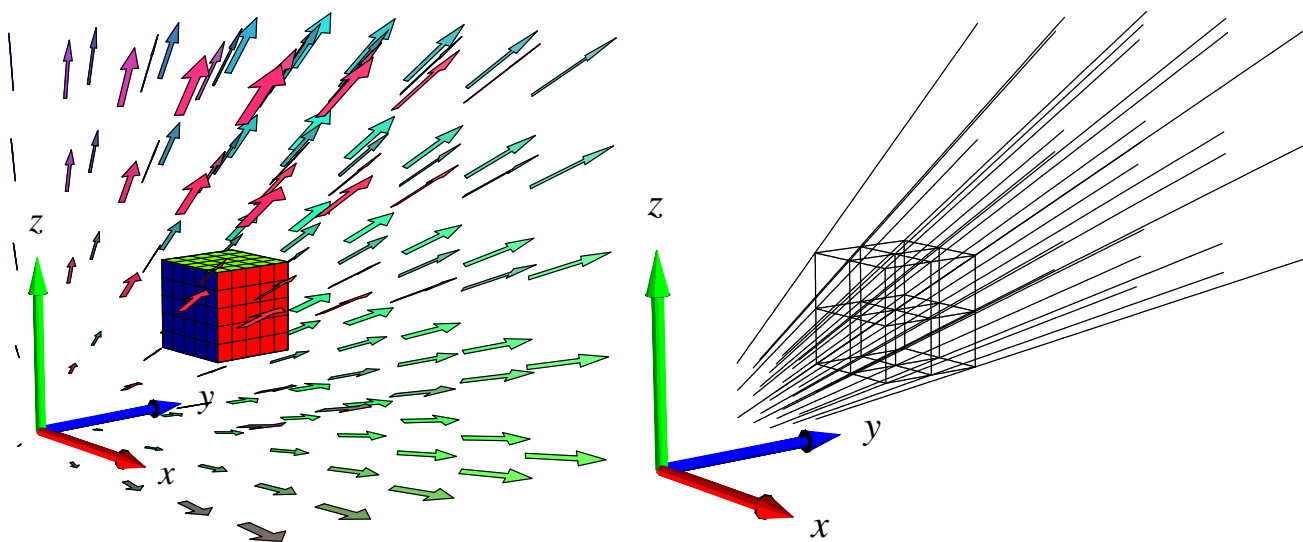
$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (x(t), y(t), z(t)) \quad .$$

Differentialligningerne for $x(t)$ og $y(t)$ er her u-koblede lineære differentialligninger, som let løses en af gangen. Resultatet er

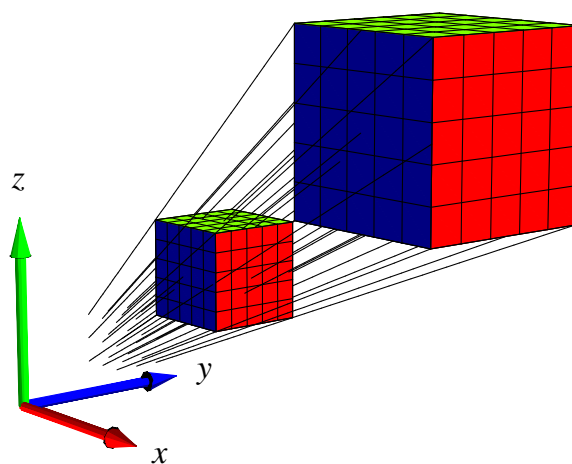
$$x(t) = x_0 \exp(t) \quad , \quad y(t) = y_0 \exp(t) \quad , \quad \text{og} \quad z(t) = z_0 \exp(t) \quad .$$

Bemærk, at hvis $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ så er $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ for alle $t \in [-\infty, \infty]$. Flowkurven 'igennem' punktet $(0, 0, 0)$ er derfor ikke nogen egentlig 'kurve' men består 'kun' af punktet selv. Bemærk også, at alle andre flowkurver kommer vilkårligt tæt på punktet $(0, 0, 0)$ for $t \rightarrow -\infty$, idet $\exp(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$, men de går ikke igennem punktet. Hvis vi følger flowkurverne i Figur 8.2 tilbage i tid fra $t = 0$ igennem negative værdier vil vi derfor se en eksponentielt aftagende *implosion* af terningen. Hvis vi derimod følger flowkurverne frem i tid fra $t = 0$ igennem større og større positive værdier for t vil vi se en eksponentielt voksende eksplosion af terningen. Flowkurverne kan igen findes og inspiceres med `Integrator3`-kommandoen `rumFlow` som vist i `Int3C_Rum.mws`. Se Figur 8.2.

Opgave 8.13. Lad \mathbf{V} betegne vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-x, -2y, -3z)$. Find og vis med `rumFlow` et passende antal af de flowkurver for vektorfeltet igennem kuglen med centrum i $(1, 0, 0)$ og radius $\frac{1}{4}$.



Figur 8.2: Eksplosionsvektorfeltet fra eksempel 8.12 sammen med de integralkurver, som går igennem en terning.



Figur 8.3: Integralkurverne for vektorfeltet fra figur 8.2 igennem en terning samt den tilsvarende deformation af terningen.

Kapitel 9

Divergens og Gauss' sætning

9.1 Hvad er divergensen af et vektorfelt?

Definition 9.1. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ være et vektorfelt i rummet. Divergensen af \mathbf{V} i punktet (x_0, y_0, z_0) defineres således:

$$\operatorname{div}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \quad . \quad (9.1)$$

Eksempel 9.2. Eksplosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ har konstant divergens $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 3$. Rotationsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ har også konstant divergens: $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$.

Opgave 9.3. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (x + \sin(y), z + \cos(y), x + y - z)$. Bestem $\operatorname{div}(\mathbf{V})$ i ethvert punkt i rummet.

Opgave 9.4. Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt af 1. grad med matrix-fremstilling som i ligning (8.2). Vis, at divergensen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er konstant lig med sporet af \mathbf{A} .

Opgave 9.5. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{grad}(h)(x, y, z)$ være gradientvektorfeltet for en given funktion $h(x, y, z)$. Vis, at divergensen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}(h)(x, y, z)) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad .$$

9.2 Motivering af divergensen: Volumen-ekspansion

Lad os betragte en massiv kugle i rummet med radius R og centrum i $(0, 0, 0)$ og lad os udvide denne kugle ved at lade alle punkterne i den flyde med flowkurverne for eksplosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$. Ifølge flow-løsningerne (fra eksempel 8.12) vokser radius af kuglen med faktoren e^t , hvor t er tiden. Det vil sige, at volumenet af kuglen som funktion af flow-tiden er givet ved: $\operatorname{Vol}(t) = (4\pi/3)R^3 e^{3t}$. Volumenet af kuglen vokser derfor (til tiden $t = 0$) med differentialkvotienten $\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(t)|_{t=0} = 4\pi R^3$.

Denne vækst i volumen kan vi også finde på en anden måde, nemlig ved at holde øje med udvidelsen af kuglens *overflade* (til tiden $t = 0$). Intuitivt har vi, at hvis prikproduktet imellem vektorfeltet \mathbf{V} og den udadrettede enhedsnormalvektor \mathbf{n} et sted på overfladen er stor, så vil den lokale volumenforøgelse tilsvarende være stor, fordi overfladen på det sted skubbes hurtigt udad. Dette kan selvfølgelig modsvares af at prikproduktet et andet sted på fladen er negativt, således at fladen skubbes indad på det sted. Kort sagt må vi forvente, at den totale udadrettede flux af vektorfeltet igennem overfladen har betydning for volumenforøgelsen. Generelt har vi da også følgende sætning:

Sætning 9.6. *Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et vilkårligt parametriseret område i rummet med udadrettet enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ langs overfladen $\partial\Omega_{\mathbf{r}}$. Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et vilkårligt vektorfelt i rummet. Vi lader alle punkterne i $\Omega_{\mathbf{r}}$ flyde tiden t langs flowkurverne for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$. Volumenet $\text{Vol}(t)$ af området efter denne deformation har da følgende differentialkvotient til tiden $t = 0$:*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(t)|_{t=0} = \int_{\partial\Omega_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} d\mu = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_{\mathbf{r}}) \quad . \quad (9.2)$$

Eksempel 9.7. Vi checker sætningen i det konkrete tilfælde med den eksploderende kugle: Fluxen af eksplosionsvektorfeltet ud igennem kuglens overflade er simpelthen overfladens areal $4\pi R^2$ gange prikproduktet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, fordi dette prikprodukt i dette specielle tilfælde er konstant: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$. Derfor er den totale flux $4\pi R^3$, altså præcis differentialkvotienten (til tiden $t = 0$) af volumenet som funktion af deformationstiden t . Vi har således verificeret sætningen i dette specielle eksempel.

Eksempel 9.8. De parametriserede rumlige områder, vi betragter, har jo sædvanligvis en rand, der består af 6 sideflader. Det betyder, at beregningen af volumenvæksten af området ved deformationen langs flowkurverne kræver beregning af 6 udadrettede flux-bidrag – eet bidrag for hver sideflade. Dette gøres direkte med Integrator3-kommandoen GaussFlux, der som argumenter har parametriseringen af det rumlige område, parameter-intervallerne, vektorfeltet, og finhedsnettet, som sædvanlig. Se eksempler på beregninger i Int3D_Flux0gDivergens.

For et vilkårligt vektorfelt i rummet kan vi undersøge volumenforøgelsen (ved flow langs vektorfeltets flowkurver) for en lille kugle S_{ρ} , der har centrum i et givet punkt, f.eks. $p = (x_0, y_0, z_0)$ og radius ρ . Vi Taylor-udvikler vektorfeltets koordinatfunktioner V_1 , V_2 og V_3 , til 1. orden med udviklingspunkt (x_0, y_0, z_0) og finder den udadrettede flux af vektorfeltet igennem den lille kugles overflade. Denne flux divideret med volumenet $(4\pi/3)\rho^3$ har en grænseværdi når radius ρ går imod 0.

Se skitsen til den beregning nedenfor. Det viser sig, at denne grænseværdi netop er divergensen af vektorfeltet i det betragtede punkt! I lyset af sætning 9.6 og ligning (9.2) har vi derfor motivereret følgende tolkning af divergensen:

Sætning 9.9. *Divergensen af et vektorfelt udtrykker den relative lokale volumen-vækst ved deformation langs flowkurverne for vektorfeltet.*

Lad os se, hvordan divergensen fremkommer ved den antydede fremgangsmåde. Vi simplificer fremstillingen på to måder: Dels vil vi vælge et koordinatsystem så $p = (0, 0, 0)$, og dels vil

vi kun medtage lineariseringen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ omkring $(0, 0, 0)$ (ε -leddene fra Taylor-udviklingerne af de 3 koordinatfunktioner tages ikke med). Til gengæld er beregningerne eksakte for vektorfelter af første grad.

Opgaven er altså at genfinde $\operatorname{div}(\mathbf{V})$ i punktet $(0, 0, 0)$ ved hjælp af en fluxberegning. Vi begynder med at Taylorudvikle \mathbf{V} . Det underforstås, at udtrykkene evalueres i udviklingspunktet $(0, 0, 0)$ medmindre andet antydes.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x, y, z) = & \left(V_1 + x \frac{\partial V_1}{\partial x} + y \frac{\partial V_1}{\partial y} + z \frac{\partial V_1}{\partial z}, \right. \\ & V_2 + x \frac{\partial V_2}{\partial x} + y \frac{\partial V_2}{\partial y} + z \frac{\partial V_2}{\partial z}, \\ & \left. V_3 + x \frac{\partial V_3}{\partial x} + y \frac{\partial V_3}{\partial y} + z \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (9.3)$$

Idet enhedsnormalvektorfeltet på overfladen af den lille ρ -kugle om $(0, 0, 0)$ er givet ved $\mathbf{n} = (x/\rho, y/\rho, z/\rho)$ følger det, at integranden i fluxberegningen er følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} = & \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(xV_1 + x^2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + xy \frac{\partial V_1}{\partial y} + xz \frac{\partial V_1}{\partial z} + \right. \\ & yV_2 + yx \frac{\partial V_2}{\partial x} + y^2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + yz \frac{\partial V_2}{\partial z} + \\ & \left. zV_3 + zx \frac{\partial V_3}{\partial x} + zy \frac{\partial V_3}{\partial y} + z^2 \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (9.4)$$

Tilbage er nu kun at integrere dette udtryk over kuglefladen S_ρ og dernæst dividere med kuglens volumen. Det er faktisk rimelig simpelt i betragtning af følgende identiteter:

$$\begin{aligned} \int_{S_\rho} x \, d\mu &= \int_{S_\rho} y \, d\mu = \int_{S_\rho} z \, d\mu = 0 \quad , \\ \int_{S_\rho} x^2 \, d\mu &= \int_{S_\rho} y^2 \, d\mu = \int_{S_\rho} z^2 \, d\mu = (4\pi/3) \rho^4 \quad , \\ \int_{S_\rho} xy \, d\mu &= \int_{S_\rho} xz \, d\mu = \int_{S_\rho} zy \, d\mu = 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.5)$$

Opgave 9.10. Vis de ovenstående identiteter i ligning (9.5). I de tilfælde hvor integralet er 0 kan dette afgøres ved en fortegns- og symmetribetragtning. Med hensyn til de øvrige: Brug f.eks. kommandoen `fladeInt` fra `Integrator3`-pakken.

For generelle vektorfelter gælder derfor følgende i den grænse hvor ρ er meget lille ($\rho \rightarrow 0$). (For vektorfelter af første grad gælder følgende dog for alle værdier af ρ .)

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(S_\rho)} \operatorname{Flux}(\mathbf{V}, S_\rho) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(S_\rho)} \int_{S_\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mu = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_3}{\partial x} = \operatorname{div}(\mathbf{V}) \quad . \quad (9.6)$$

Hermed har vi afsluttet den lokale bestemmelse af divergensen af et vektorfelt og vist den geometriske tolkning i sætning 9.9.

Men denne fremstilling af divergensen åbner også op for en naturlig ide, som går i den modsatte retning: Da den lokale punktvis volumen-vækst ved deformation langs flowkurverne er bestemt af divergensen af vektorfeltet, så er følgende en rimelig formodning: Hvis vi integrerer divergensen over et område i rummet, så skulle resultatet gerne være sammenlignelig med den totale volumenvækst af hele området. Altså groft sagt skulle summen af de lokale volumentilvækster gerne være den totale volumentilvækst. Dette er præcis indholdet af Gauss' sætning, som vi nu formulerer ved hjælp af fluxen ud igennem randoverfladen.

9.3 Gauss' sætning

Sætning 9.11 (Gauss' sætning). *Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et rumligt område med randoverflade $\partial\Omega_{\mathbf{r}}$ og udadrettet enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på randoverfladen. For ethvert vektorfelt \mathbf{V} i rummet gælder så følgende:*

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} \operatorname{div}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu = \operatorname{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_{\mathbf{r}}) \quad , \quad (9.7)$$

hvor fluxen altså skal beregnes med hensyn til det udadrettede enhedsnormalvektorfelt på randoverfladen af det givne rumlige område.

Med `Integrator3`-kommandoerne `GaussFlux` og `divInt` kan begge sider af ligning (9.7) beregnes i konkrete tilfælde og dermed verificere Gauss' sætning.

Eksempel 9.12. Hvis vektorfeltet \mathbf{V} har divergensen 0 i alle punkter i rummet, så vil ethvert rumligt område, der flyder med vektorfeltet, bevare sit volumen. Formen kan naturligvis ændres meget som tiden går, men volumenet er konstant. Desuden er fluxen *ud* igennem overfladen af ethvert rumligt område tilsvarende 0. Se opgave 8.11

Eksempel 9.13. For eksplosionsvektorfeltet, $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$, der har den konstante divergens $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 3$, gælder altså følgende for et vilkårligt rumligt område: $3 \operatorname{Vol}(\Omega) = \operatorname{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega)$.

Opgave 9.14. Benyt `GaussFlux` til at verificere påstanden om $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ i ovenstående eksempel 9.13 for det rumlige område, der består af den massive cylinder i Figur 5.5.

Kapitel 10

Rotation og Stokes' sætning

10.1 Hvad er rotationen af et vektorfelt?

Definition 10.1. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ være et vektorfelt i rummet. Rotationen af \mathbf{V} i punktet (x_0, y_0, z_0) defineres som følgende vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) = & \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \right. \\ & \frac{\partial V_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \\ & \left. \frac{\partial V_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) . \end{aligned} \quad (10.1)$$

Eksempel 10.2. Eksplosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ har konstant rotation $\mathbf{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$. Det roterende vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ har heldigvis også konstant rotation (forskellig fra $\mathbf{0}$): $\mathbf{rot}(\mathbf{V}) = (0, 0, 2)$.

Opgave 10.3. Lad $\mathbf{V}(x, y, z) = (x + \sin(y), z + \cos(y), x + y - z)$. Bestem $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$ i ethvert punkt i rummet.

Opgave 10.4. Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vektorfelt af 1. grad med matrix-fremstilling som i ligning 8.2. Vis, at rotationen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ er en konstant vektor og udtryk vektoren ved elementerne i \mathbf{A} .

Opgave 10.5. Lad $h(x, y, z)$ betegne en reel funktion i rummet og lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vilkårligt vektorfelt. Vis, at der gælder følgende:

$$\operatorname{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{grad}(h)) = \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{grad}(h) .$$

10.2 Motivering af rotationen: Vridning

Definition 10.6. Lad \mathbf{V} være et vektorfelt i rummet og lad $F_{\mathbf{r}}$ betegne en flade i rummet. Ved den totale vridning $\mathbf{Vr}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}})$ af $F_{\mathbf{r}}$ med \mathbf{V} med hensyn til normalvektorfeltet \mathbf{n}_F for fladen forstås

følgende vektor

$$\mathbf{Vr}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{n}_F \times \mathbf{V} \, d\mu \quad . \quad (10.2)$$

Denne definition ser ikke umiddelbart ud til at have meget med rotationsvektoren at gøre som defineret i definition 10.1. Ikke desto mindre kan vridningen udtrykke rotationen af et vektorfelt i ethvert givet punkt p på samme måde som fluxen kan finde divergensen - nemlig som en grænseværdi ved betragtning af små kugleflader S_{ρ} , der trækker sig sammen omkring p ved at lade radius $\rho \rightarrow 0$. Se ligning (9.6).

Sætning 10.7.

$$\frac{1}{\text{Vol}(S_{\rho})} \mathbf{Vr}(\mathbf{V}, S_{\rho}) = \frac{1}{\text{Vol}(S_{\rho})} \int_{S_{\rho}} \mathbf{n}_{S_{\rho}} \times \mathbf{V} \, d\mu = \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \quad . \quad (10.3)$$

Dette indses på samme måde som for divergens-beregningen. Vektorfeltet udvikles til første orden med udviklingspunkt p og indsættes i vridningsudtrykket, hvorefter identiteterne 9.5 benyttes. De eneste partielle afledede af vektorfeltets koordinatfunktioner, der ikke integreres væk, er præcis dem, der optræder i rotationsvektoren $\mathbf{rot}(\mathbf{V})$ når denne evalueres i p . Prøv det!

Eksempel 10.8. Et simpelt eksempel er det roterende vektorfelt i eksempel 10.2. Dette felt har den konstante rotation $(0, 0, 2)$. Vi vil vise, hvordan $\mathbf{Vr}(\mathbf{V}, S(\rho))$ netop giver denne rotation i punktet $(0, 0, 0)$. Lad S_{ρ} betegne den kugleflade, der har radius ρ og centrum i $(0, 0, 0)$. Så er

$$\begin{aligned} \mathbf{Vr}(\mathbf{V}, S_{\rho}) &= \frac{1}{\rho} \int_{S_{\rho}} \mathbf{n} \times \mathbf{V} \, d\mu = \frac{1}{\rho} \int_{S_{\rho}} (x, y, z) \times (-y, x, 1) \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{S_{\rho}} (x, y, z) \times (-y, x, 1) \, d\mu \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{S_{\rho}} (y - xz, -x - yz, x^2 + y^2) \, d\mu \\ &= (0, 0, 2 \text{Vol}(S_{\rho})) \\ &= \text{Vol}(S_{\rho}) \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \quad , \end{aligned}$$

i overensstemmelse med sætning 10.7.

I mere komplicerede tilælde kan den totale vridning af en flade med et givet vektorfelt beregnes med Maple kommandoen `fladeTotalVrid` fra `Integrator3`-pakken. Hvis den aktuelle flade er randoverfladen af et givet rumligt område beregnes vridningen med `rumRandTotalVrid`. Derved muliggøres naturligvis også konkrete eftervisninger af ligning (10.3).

Som for divergensen er der nu en naturlig og ikke overraskende omvendt sætning for den totale vridning af randoverfladen af et vilkårligt rumligt område, nemlig følgende, som vi vil bevise i næste afsnit.

Sætning 10.9. *Lad $\Omega_{\mathbf{r}}$ betegne et rumligt område med randoverfladen $\partial\Omega_{\mathbf{r}}$, og lad \mathbf{V} være et givet vektorfelt i rummet. Så gælder følgende identitet for den totale vridning af overfladen beregnet med hensyn til det udadrettede enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ til $\partial\Omega_{\mathbf{r}}$:*

$$\mathbf{Vr}(\mathbf{V}, \partial\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \, d\mu \quad . \quad (10.4)$$

Den totale rotation over det rumlige område kan således bestemmes ved en integration over områdets rand. Også dette resultat kan direkte checkes med Maple i konkrete tilfælde, dels ved brug af `rumRandTotalVrid` og dels med kommandoen `rumTotalRot`.

10.3 Gauss–Stokes’ sætning for rumlige områder

Ved at indsætte resultatet fra opgave 10.5 i Gauss’ divergenssætning (sætning 9.11) finder vi direkte følgende:

Sætning 10.10. *Lad $h(x, y, z)$ betegne en reel funktion i rummet og lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et vilkårligt vektorfelt i rummet. Med Ω betegner vi et givet område i rummet med randoverflade $\partial\Omega$ og u-dadrettet enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$. Så gælder:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{grad}(h)) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \times \mathbf{grad}(h)) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu \quad , \quad (10.5)$$

og derfor også følgende

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{grad}(h) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \times \mathbf{grad}(h)) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu \quad , \quad (10.6)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{grad}(h) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{grad}(h) \, d\mu \quad , \quad (10.7)$$

I den sidste ligning har vi benyttet, at rumproduktet $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ af tre vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og \mathbf{c} tilfredsstiller følgende identiteter (hvoraf vi her bruger den første):

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{cab}] = [\mathbf{bca}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}] \quad . \quad (10.8)$$

Vi er hermed parate til at indse den før omtalte og forventede forbindelse mellem den totale rotation af et vektorfelt i et rumligt område og den totale vridning af områdets overflade, jævnfør afsnit 10.2.

Sætning 10.11.

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}_{\partial\Omega} \times \mathbf{V} \, d\mu \quad . \quad (10.9)$$

Lad nemlig først h være den simple funktion $h(x, y, z) = x$. Så er $\mathbf{grad}(h)(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Indsæt dette i ligning 10.7 som så giver, at de to vektorer i 10.9 i hvert fald har samme første koordinat. Med valgene $h(x, y, z) = y$ og $h(x, y, z) = z$ henholdsvis, ses tilsvarende at de to vektorer også har samme 2. og 3. koordinat, hvoraf følger, at de må være ens.

`Integrator3` indeholder to kommandoer, `rumTotalRot` og `fladeTotalVrid`, som kan benyttes til beregning dels af den totale rotation af et givet vektorfelt i et rumligt område og dels den totale vridning af områdets randoverflade. Derved kan sætning 10.11 verificeres i ethvert konkret tilfælde.

Eksempel 10.12. For et et 1. grads vektorfelt er rotationen en konstant vektor, således at vektorfeltets totale vridning af overfladen af et vilkårligt rumligt område er den konstante rotation ganget med områdets volumen.

Opgave 10.13. Check påstanden i eksemplet ovenfor for hver af de vektorfelter, der er defineret i eksemplerne 8.2, 8.3, og 8.5. Vælg selv et passende parametriseret område Ω og benyt eventuelt `rumTotalRot` og `fladeTotalVrid`.

10.4 Stokes' sætning

Til sidst vil vi her benytte sætning 10.10, og specielt igen ligning (10.7), på de rumlige områder, der konstrueres som *skaller* ud fra en vilkårlig given flade $F_{\mathbf{r}}$ med randkurve $\partial F_{\mathbf{r}}$.

Definition 10.14. *Lad*

$$F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], v \in [c, d]$$

betegne en flade i rummet. Ved δ -skallen med grundfladen $F_{\mathbf{r}}$ forstås følgende rumlige område:

$$\Omega_{F_{\mathbf{r}}}(\delta) : \mathbf{r}_S(u, v, w) = \mathbf{r}(u, v) + w \mathbf{n}_F(u, v) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [0, \delta],$$

hvor $\mathbf{n}_F(u, v)$ betegner standard enhedsnormalvektorfeltet for fladen $F_{\mathbf{r}}$ på stedet $\mathbf{r}(u, v)$. Se afsnit 3.4.

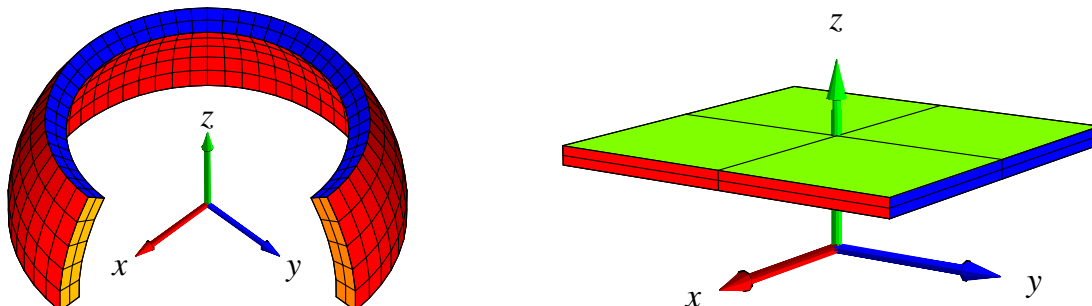
Bemærkning 10.15. En skal er således bygget op som en lagkage af de flader, der fremkommer ved at skubbe grundfladen i retning af grundfladens normalvektorfelt. Hvert lag i skallen er altså (næsten) en kopi af grundfladen. Lagene fremkommer ved at holde w konstant i parameterfremstillingen $\mathbf{r}_S(u, v, w)$ for det rumlige område. Specielt vil normalvektorfeltet for w -laget være en parallel-forskydning af grundfladens normalvektorfelt (for samme værdier af (u, v)). Det udadrettede normalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ til det rumlige område $\Omega_{F_{\mathbf{r}}}(\delta)$ langs topfladen $\mathbf{r}_S(u, v, \delta)$ er derfor \mathbf{n}_F og det udadrettede normalvektorfelt til det rumlige område $\Omega_{F_{\mathbf{r}}}(\delta)$ langs grundfladen $\mathbf{r}_S(u, v, 0)$ er $-\mathbf{n}_F$. Denne observation får nu afgørende betydning i vores begrundelse for Stokes' sætning for flader.

I den grænse, hvor skal-tykkelsen δ går imod 0 får vi nemlig ud fra sætning 10.10 og ligning (10.7) følgende klassiske Stokes' sætning for flader med rand:

Sætning 10.16 (Stokes' sætning). *Lad $F_{\mathbf{r}}$ betegne en givet flade med rand $\partial F_{\mathbf{r}}$ og lad \mathbf{V} være et vektorfelt i rummet. Så gælder:*

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu = \text{Tan}(\mathbf{V}, \partial F_{\mathbf{r}}) d\mu, \quad (10.10)$$

hvor der ved beregning af det tangentielle kurveintegral langs randen skal benyttes præcis den orientering $\mathbf{e}_{\partial F}$ af randen der gør, at krydsproduktet $\mathbf{e}_{\partial F} \times \mathbf{n}_F$ peger væk fra fladen $F_{\mathbf{r}}$ langs randkurven.



Figur 10.1: To skaller defineret ud fra forskellige grundflader med rand. Til venstre er grundfladen et stykke af en kugleflade, til højre er grundfladen et plant kvadrat.

Bemærkning 10.17. Med hensyn til koordineringen af orienteringen af fladen med orienteringen af fladens randkurve: Lad $\hat{\mathbf{n}}_{\partial F}$ betegne den enhedsvektor langs med randen som peger bort fra randen og som samtidig står vinkelret på fladens normalvektorfelt ved randen. Så er betingelsen på orienteringen af fladens randkurve følgende:

$$\mathbf{n}_F \times \hat{\mathbf{n}}_F = \mathbf{e}_{\partial F} \quad .$$

Dette svarer til højrehåndsreglen: Højre hånd placeres ved fladens rand med tommeltotten i retning af fladens normalvektorfelt \mathbf{n}_F og med fladen til venstre for hånden. Så skal fingrene pege i samme retning som orienteringen af randkurven.

Vi nøjes med at skitsere argumentet for Stokes' sætning, idet den er en rimelig klar konsekvens af ligning (10.7). Vi anvender simpelthen den ligning på en tilstrækkelig tynd δ -skal med grundflade $F_{\mathbf{r}}$ og vælger $h(x, y, z)$ til at være en funktion, der har grundfladen som niveauflade og som iøvrigt tilfredsstiller, at $\mathbf{grad}(h) = \mathbf{n}_F$ langs hele grundfladen. Som funktion h kan for eksempel vælges afstandsfunktionen til grundfladen, med fortegn, således at afstanden regnes positiv og voksende i retningen \mathbf{n}_F og negativ og aftagende i retningen $-\mathbf{n}_F$ ud fra grundfladen, hvor $h = 0$.

Venstre side i ligning (10.7) er så næsten (dvs. til og med første orden i δ) lig med

$$\text{VS}(10.7) = \delta \cdot \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu \quad , \quad (10.11)$$

jævnfør bemærkning 10.15 og se Figur 10.1.

Højre siden i ligning (10.7) findes ved at integrere over overfladen af det rumlige område. Da det udadrettede enhedsnormalfelt på topfladen er modsat rettet grundfladens enhedsnormalvektorfelt, vil de to bidrag til højre siden i ligningen ophæve hinanden (igen til første orden i δ). Tilbage er der kun bidraget langs det smalle δ -bælte rundt langs skallen. Her er det udadrettede enhedsnormalvektorfelt til skallen vinkelret på \mathbf{n}_F , således at bidraget bliver følgende (til første

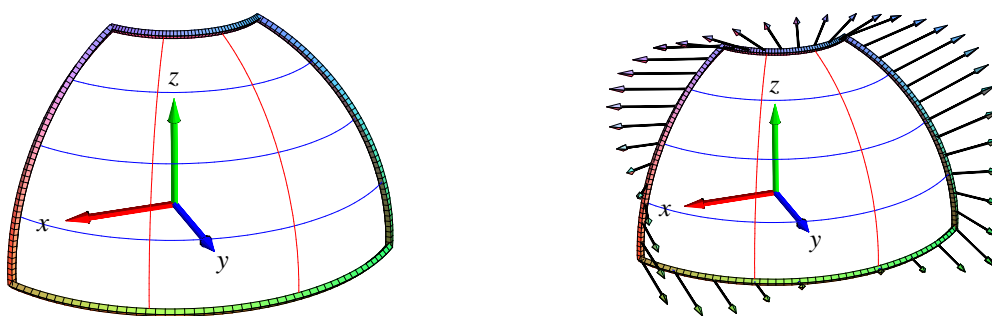
orden i 'bælte-bredden' δ):

$$\begin{aligned}
 \text{HS}(10.7) &= \delta \cdot \int_{\partial F_r} (\hat{\mathbf{n}}_F \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_F \, d\mu \\
 &= \delta \cdot \int_{\partial F_r} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{n}_F \times \hat{\mathbf{n}}_{\partial F}) \, d\mu \\
 &= \delta \cdot \int_{\partial F_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial F_r} \, d\mu \\
 &= \delta \cdot \text{Tan}(\mathbf{V}, \partial F_r) \, d\mu \quad .
 \end{aligned}
 \tag{10.12}$$

Ved nu at sammenholde ligning (10.11) med ligning (10.12) fås Stokes' sætning 10.16 af ligning (10.7).



Figur 10.2: Et stykke af en kugleflade samt rotationen $\text{rot}(\mathbf{V})$ ved fladestykket er her vist for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (z^2 x, x^2 y, y^2 z)$. Vektorfeltet \mathbf{V} er ikke selv vist. Integrator 3-kommandoen `StokesFlux` viser og beregner fluxen af rotationen igennem fladen. Se eksemplerne i Maple filen `Int3D_FluxOgDivergens`.



Figur 10.3: Ifølge Stokes' sætning for flader i rummet er den flux, der vises i Figur 10.2 lig med det tangentielle kurveintegral (passende orienteret) af vektorfeltet \mathbf{V} langs med randkurven for fladestykket. Det er denne randkurve og vektorfeltet \mathbf{V} langs med randkurven, der antydes i figurerne her. Sammen med selve beregningen af det tangentielle kurveintegral er figurerne en del af output fra `StokesRandInt`.

Kapitel 11

Hvordan bruges Integrator3 ?

Integrator3.m og et omfattende eksempel materiale i form af Maple worksheets findes på adressen: <http://www.mat.dtu.dk/education/01005/MWS/INTEGRATOR3/>

I den første eksempel-fil Int3A_Kurver.mws forklares dels hvordan du henter selve pakken Integrator3.m fra ovenstående adresse og dels - via eksempler - hvordan du bruger og aktiverer de enkelte procedurer i pakken. Den nævnte eksempel-fil er kun én ud af en række worksheets med eksempler. I Int3A_Kurver.mws handler alle eksemplerne om kurver (længder, massemidtpunkter, inertimomenter, kraftmomenter, flowkurver, etc.).

11.1 Om at konstruere pakker med Maple-procedurer

Konstruktionen af Maple-procedurepakken Integrator3.m fremgår af den rå Maple kode for pakken, som findes i Maple-filen Integrator3.mws. Heraf fremgår dels hvordan du kan ændre i pakken og dels hvordan du skriver dine egne procedurer og kombinerer og gemmer dem i en pakke i dit lokale Maple-bibliotek. Se især de tre afsnit 'Init' (pakken defineres først som en tom tabel), 'Baser' (procedurer konstrueres og defineres som elementer i pakke-tabellen) og 'Saving' (pakken gemmes i dit lokale bibliotek).

11.2 Eksempel: Beregning af et rumintegral over en massiv kasse.

En retvinklet massiv kasse med siderne a , b og c . Kassens massefylde er givet ved kvadratet på afstanden fra et af hjørnepunkterne. Opgaven er at finde den totale masse af kassen som funktion af a , b , og c .

- Kassen med siderne a , b , og c kan parametriseres som vist nedenfor. Det kræver selvfølgelig først en overvejelse at finde ud af, om det valgte koordinatsystem er det 'rigtige' og/eller det 'bedste' til at udtrykke massefylden som funktion af koordinaterne.

```
> r := (u,v,w) -> [u, v, w]:
> B := [0,a,0,b,0,c]:
> net := [7,9,13]:
```

- Vægtfunktionen sættes til :

```
> f := (x,y,z) -> x^2 + y^2 + z^2:
```

- Kommandoen 'rumInt' bruges på dette input med følgende resultat. (NB: 'net' benyttes faktisk ikke her, idet kassen jo ikke kan tegnes, når siderne ikke er angivet eksplicit. Prøv selv at bruge 'rumInt' kommandoen med specificerede kantlængder.) :

```
> rumInt(r, B, f, net);
```

Parameterfremstilling: $r(u,v,w) = [u, v, w]$

Definitionsområde: $[0, a, 0, b, 0, c]$

Angivet funktion: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Jacobi (u,v,w) :

$$\text{Jacobi}(u, v, w) = 1$$

Rum-integralet af funktionen f:

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = \frac{1}{3} a^3 b c + \frac{1}{3} a b^3 c + \frac{1}{3} a b c^3$$

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = 0.333 a^3 b c + 0.333 a b^3 c + 0.333 a b c^3$$

Beregning af rum-integralet:

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = \int_0^c \int_0^b \int_0^a (u^2 + v^2 + w^2) \text{Jacobi}(u, v, w) du dv dw$$

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = \int_0^c \int_0^b \int_0^a u^2 + v^2 + w^2 du dv dw$$

-----INTERMEZZO: :::::

$$\int_0^a u^2 + v^2 + w^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3 + v^2 u + w^2 u \right]_{u=0..a}$$

$$[] = \frac{1}{3} a^3 + v^2 a + w^2 a$$

$$\int_0^b \int_0^a u^2 + v^2 + w^2 du dv = \int_0^b \frac{1}{3} a^3 + v^2 a + w^2 a dv$$

$$\int_0^b \frac{1}{3} a^3 + v^2 a + w^2 a dv = \left[\frac{1}{3} a^3 v + \frac{1}{3} v^3 a + w^2 a v \right]_{v=0..b}$$

11.2. EKSEMPEL: BEREGNING AF ET RUMINTEGRAL OVER EN MASSIV KASSE. 69

$$\square = \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}ab^3 + w^2ab$$

$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a u^2 + v^2 + w^2 du dv dw = \int_0^c \left[\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}ab^3 + w^2ab \right] dw$$

$$\int_0^c \left[\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}ab^3 + w^2ab \right] dw = \left[\frac{1}{3}a^3bw + \frac{1}{3}ab^3w + \frac{1}{3}w^3ab \right]_{w=0..c}$$

$$\square = \frac{1}{3}a^3bc + \frac{1}{3}ab^3c + \frac{1}{3}abc^3$$

-----KONKLUSION:.....:

$$\int_{\Omega_r} f d\mu = \frac{1}{3}a^3bc + \frac{1}{3}ab^3c + \frac{1}{3}abc^3$$

=====

- Med kommandoen 'rumIntGo' fås resultatet direkte uden mellemregninger. (Derved kan resultatet lettere benyttes i eventuelle efterfølgende beregninger hvori massen indgår) :

> rumIntGo(r,B,f,net);

$$\frac{1}{3}a^3bc + \frac{1}{3}ab^3c + \frac{1}{3}abc^3$$

=====

Litteratur

- [MA1] H. Elbrønd Jensen, *Matematisk Analyse 1*, Institut for Matematik, DTU (2000).
- [MA2] P. W. Karlsson og V. Lundsgaard Hansen, *Matematisk Analyse 2*, Institut for Matematik, DTU (1998).
- [LA] J. Eising, *Lineær Algebra*, Institut for Matematik, DTU (1999).
- [A] P. Alsholm, *Maple*, Institut for Matematik, DTU (2003).
- [doC] M. P. doCarmo, *Differential Forms and Applications*, Springer (1994).
- [CBS] G. Christiansen, E. Both, og P. Østergaard Sørensen, *Mekanik*, Institut for Fysik, DTU (2002).
- [EP] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, Sixth Edition, Prentice Hall (2002).
- [F] G. R. Fowles, *Analytical Mechanics*, 6.th ed., Thomson Learning (1998).
- [FLS] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1*, Addison Wesley (1965).
- [M] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Perseus Books Group (1997).
- [P] H. Pley, *Maple worksheets for Calculus*, CD-ROM attachment to [EP], Prentice Hall (2002).
- [S] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Perseus Books Group (1965).
- [Int3] Integrator3-pakken og tilhørende eksempelmateriale i form af Maple worksheets findes på adressen:
<http://www.mat.dtu.dk/education/01005/MWS/INTEGRATOR3/>

INSTITUT OR MATEMATIK, MATEMATIKTORVET, DTU - BYGNING 303
OG LEARNING LAB DTU, DTV, BYGNING 101, 2800 KGS. LYNGBY.
E-mail adresse: S.Markvorsen@mmat.dtu.dk