Facitliste til udvalgte aktivitetsopgaver i MAT 1. Forår

Semesteruge F1

MA1 622. (a) $-\frac{1}{2}$. (b) 0.
MA1 623. (a) $\frac{1}{6}$. (b) $-\frac{1}{6}$.
MA1 624. (a) $\frac{1}{2}$. (b) 1.
MA1 628.
(a) $f(x) = 1 + 2x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, hvor $\varepsilon(x) -> 0$ for $x -> 0$.
(b) $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, hvor $\varepsilon(x) -> 0$ for $x -> 0$.
MA1 634. (a) $f(x) -> -\infty$ for $x -> 0$. (b) $f(x) -> \frac{1}{2}$ for $x -> 0$.
MA1 638.
(1) Følger af, at
$f(x) - f(x_0) = (\frac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon(x - x_0))(x - x_0)^2 < 0$ for alle x i en tilpas lille udprikket omegn af x_0.
(2) f har hverken maksimum eller minimum i punktet x_0 (x_0 er et vendepunkt for f), hvilket følger af, at
$f(x) - f(x_0) = (\frac{1}{3!}f'''(x_0) + \varepsilon(x - x_0))(x - x_0)^3$, hvor $\varepsilon(x - x_0) -> 0$ for $x -> x_0$.
MA1 H117.
(1) Følger af Taylors formel for n = 2 og x_0 = 0.
(2) Af (1) med $x = (\frac{v}{c})^2 \in [0;1[$ fås

$$E_{kin}(v) = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}\frac{m_0v^4}{c^2(1-\xi)^{\frac{5}{2}}}$$ for et ξ mellem 0 og $(\frac{v}{c})^2$. Vi har da

$$F = \frac{3}{8}\frac{m_0v^4}{c^2(1-\xi)^{\frac{5}{2}}E_{kin}(v)} < \frac{3(\frac{v}{c})^2}{4(1-(\frac{v}{c})^2)^{\frac{5}{2}}} .$$ ($T(v) < E_{kin}(v)$ og $1 - \xi$ er aftagende.)

(3) $0 \le v \le 3 \cdot 10^4 \ \mathrm{km}/\mathrm{s} \Rightarrow 0 \le \frac{v}{c} \le 0{,}1 \Rightarrow F < \frac{3 \cdot 0{,}01}{4(1-0{,}01)^{\frac{5}{2}}} < 0{,}01$.

MA2 70.
$P_2(x,y) = 1 + x - 2y + \frac{1}{2}x^2 - xy + 2y^2$
$Q_2(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2$.
$P_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0{,}875$. $Q_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0{,}875$. $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}7788007831$. (Maple.)
MA2 72.
(b) $P_2(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{8}{125}(x-3)^2 - \frac{12}{125}(x-3)(y-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2$.
MA2 73. (a) I forlængelse af MA2 72(b) fås
$L = \sqrt{2.9^2 + 4.2^2} = f(2.9, 4.2) \approx P_2(2.9, 4.2) = 5.104$.
MA2 74. $P_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

Semesteruge F2

LA 8.20. $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ og $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$ udgør en ortonormal basis for L_{Hom}.
LA 8.24. $\underline{\underline{A}}$ ortogonal $\Leftrightarrow$ $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

LA 8.36.

1) Egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ er –4 (enkelt) og 2 (dobbelt). $\underline{\underline{v}}_1 = [1 \quad 1 \quad -2]^T$ er en egentlig egenvektor hørende til enkeltroden –4.

2) Egenværdierne for $\underline{\underline{B}}$ er 0 (enkelt) og 3 (dobbelt). $\underline{\underline{v}}_2 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ er en egentlig egenvektor hørende til enkeltroden 0.

(1) $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \underline{\underline{v}}_1{}^T \underline{\underline{v}}_2 = 0$.

(2) $\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

LA 10.39.

1) $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ lineært uafhængige og $\underline{u}_4 = 2\underline{u}_1 - \underline{u}_2 + \underline{u}_3 \Rightarrow (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ basis for U og ${}_u\underline{\underline{u}}_4 = [2 \quad -1 \quad 1]^T$.

2) $\underline{v}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\underline{v}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $\underline{v}_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ udgør en ortonormal basis for U.

MA2 72. (g) $P_2(x,y,z) = 1 + x(z-1) + y(z-1)$.

$f''_{xz}(0,0,1) = f''_{zx}(0,0,1) = f''_{yz}(0,0,1) = f''_{zy}(0,0,1) = 1$ og de øvrige afledede i (0,0,1) er lig med 0.

MA2 120.

(a) $M = 0$ og $S = 26$ (2. hovedsætning). Vm(f) = $[0;26]$ (1. hovedsæt-ning).

(b) $M = -\frac{7}{2}$ og $S = \frac{3}{2}$ (2. hovedsætning). Vm(f) = $[-\frac{7}{2};\frac{3}{2}]$ (1. hovedsæt-ning).

Semesteruge F3

LA 9.4. Parabel med p = 2 og toppunkt i (x,y) = (4,3). Symmetriakse: $(x,y) = t(4,3)$, $t \in \mathbf{R}$.

LA 9.8. Ellipse med a = 2 og b = 1. Centrum har koordinaterne (x,y) = (4,3). Storakse: $(x,y) = t_1(4,3)$, $t_1 \in \mathbf{R}$. Lilleakse: $(x,y) = (4,3) + t_2(3,-4)$, $t_2 \in \mathbf{R}$.

LA 9.17. Hyperboloide med eet net. Centrum i $(x,y,z) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$.

Hovedakse: $(x,y,z) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1) + t(0,0,1), t \in \mathbf{R}$.

MA2 100.

(d) Stationære punkter: (0, 0), (2, 0) og $(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5})$. f har egentligt minimum i (2, 0) og f har ikke ekstremum i (0, 0) og $(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5})$.

MA2 110.

(d) Stationære punkter: $(0, 0, \frac{\pi}{2} + p\pi)$, $p \in \mathbf{Z}$. f har ikke ekstremum i de stationære punkter.

(e) (0,0,0) er eneste stationære punkt og f har ikke ekstremum i (0,0,0).

MA2 111. (a,a,a) er eneste stationære punkt i $\mathbf{R}^3_+$ og f har egentligt maksimum i (a,a,a).

Semesteruge F4

MA2 75. (c) $(x,y,z) = (1,0,1) + u(0,1,1)$, $u \in \mathbf{R}$. (f) $(x,y,z) = (0,1,1) + u(1,0,6)$, $u \in \mathbf{R}$.

MA2 150.
(a) $1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le x^3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2 \wedge 0 \le \frac{y}{x^3} \le 1$. Sættes x = u og $v = \frac{y}{x^3}$ fås parameterfremstilling af B: $(x,y) = \underline{r}(u,v) = (u, vu^3)$, $u \in [1;2]$, $v \in [0;1]$.
$\int_B \frac{1}{(x+y)^2}\, dS = \frac{1}{2}\ln(\frac{5}{2})$.
(b) $\int_B \frac{x}{1+xy}\, dS = 2\ln(2) - 1$.
(l) $0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1-x \Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le \frac{y}{1-x} \le 1$. Sættes x = u og $v = \frac{y}{1-x}$ fås parameterfremstilling af B: $(x,y) = \underline{r}(u,v) = (u, v(1-u))$, $u \in [0;1]$, $v \in [0;1]$.
$\int_B (3y^2 + 2xy)\, dS = \frac{1}{3}$.
MA2 151.
(i) $\int_B (x^2 - y^2)\, dS = \frac{1}{8}a^4$.
(j) B er cirkelskiven: $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \le (\frac{a}{2})^2$, som har parameterfremstillingen:
$(x,y) = \underline{r}(u,v) = (\frac{a}{2}u + \frac{a}{2}u\cos(2v), \frac{a}{2}u\sin(2v)) = (au\cos^2(v), au\sin(v)\cos(v))$,
$u \in [0;1]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. $\int_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dS = \frac{4}{9}a^3$.
MA2 185. (g) $\int_K \frac{x+y}{z^2}\, ds = \sqrt{3}(\sin(u) - \cos(u) + 1)$.
MA2 186. (c) $\int_K x^2 ds = 9 - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.
MA2 187. (b) $\int_K (x^2 + y^2)\, ds = \frac{\sqrt{2}}{3}(e^{12} - 1)$. (j)
MA2 188. (b) $\underline{r}_N(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(s+1)(\cos(\ln(s+1)), \sin(\ln(s+1)), 1)$, $s > -1$.
MA2 475. $\int_K x\, ds = \frac{5\sqrt{10}}{3}(\frac{\pi^2}{8} + 4)$.
MA2 502.
1. $(x,y,z) = (4, e^4, 12) + u(4, 2e^4, 12), u \in \mathbf{R}$.
2. Tangenten skærer y-aksen i punktet $(0, -e^4, 0)$ svarende til u = –1. Dvs. $\beta = -e^4$.

Flader, flade-integral

MA2 190. (c) F: $\underline{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), 2 - u^2)$, $u \in [0;\sqrt{2}]$, $v \in [0;2\pi]$.
$\int_F z\, dS = \frac{37}{10}\pi$.
MA2 191.
(a) C: $\underline{r}(u,v) = (1 + \cos(u), \sin(u), v\sqrt{2 + 2\cos(u)})$, $u \in [0;2\pi]$, $v \in [0;1]$.
$\int_C (y^2 z + x^2 z + y)\, dS = 6\pi$.
(c) C: $\underline{r}(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $u \in [0;2\pi]$, $v \in [0;2]$.
$\int_C (z^2 + x^2)\, dS = \frac{22}{3}\pi$.
(d) C: $\underline{r}(u,v) = (u, u^2, uv)$, $u \in [0;1]$, $v \in [0;1]$. $\int_C z\, dS = \frac{9\sqrt{5}}{64} - \frac{1}{128}\ln(2 + \sqrt{5})$.
MA2 192. (a) O: $\underline{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \frac{1}{2a}u^2)$, $u \in [0;a]$, $v \in [0;2\pi]$.
$\int_O (x^2 + y^2)\, dS = \frac{4}{15}\pi a^4(\sqrt{2} + 1)$.
MA2 193.
(c) $1 \le u \le 2 \wedge 0 \le v \le u \Leftrightarrow 1 \le u \le 2 \wedge 0 \le \frac{v}{u} \le 1$. Sættes u = s og $t = \frac{v}{u}$ fås ny parameterfremstilling af F: $\underline{r}(s,t) = (\sqrt{s}\cos(ts), \sqrt{s}\sin(ts), (ts)^{\frac{3}{2}})$, $s \in [1;2]$, $t \in [0;1]$.

$\int_F (x^2 + y^2)\,dS = \frac{7}{162}(13\sqrt{13} - 8)$.

Flux

MA2 214.
(a) $\Phi = 90$. (b) $\Phi = \pi$. (c) $\Phi = \frac{\pi}{4} a^4$. (e) $\Phi = 2\pi(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}})$.

(f) $\Phi = \frac{4\pi h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. (g) $\Phi = \pi^2 h$. (h) $\Phi = \frac{4}{5}\sqrt{2} + \frac{23}{40}$.

Rum-integral

MA2 170.
(a)
$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 - x - y \Leftrightarrow$
$0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x \wedge 0 \leq z \leq 2 - x - y \Leftrightarrow$
$0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq \frac{y}{1-x} \leq 1 \wedge 0 \leq \frac{z}{2-x-y} \leq 1$.
Sættes x = u, $v = \frac{y}{1-x}$ og $w = \frac{z}{2-x-y}$ fås parameterfremstilling af B:
$(x,y,z) = \underline{r}(u,v,w) = (u, v(1-u), w(2-u-v(1-u)))$, $u \in [0;1]$, $v \in [0;1]$, $w \in [0;1]$.
$\int_A xy^2 z\,d\Omega = \frac{29}{2520}$.

Uegentligt integral

MA1 646. (b)
(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ er defineret og kontinuert for –1 < x < 1.
(2) Vandret tangent i (0,1) (minimum) og $f(x) \to \infty$ for $x \to \pm 1$.
(3) Det givne uegentlige integral er konvergent.
(4) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx := \pi$.

MA1 649. (b)
(1) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ er defineret og kontinuert for alle $x \in \mathbf{R}$.
(2) Vandret tangent i (–1,–1) (minimum) og i (1,1) (maksimum). $f(x) \to 0$ for $x \to \pm\infty$.
(3) Det givne uegentlige integral er divergent.

MA2 160.
(g) Det givne uegentlige planintegral er divergent.
(k) Det givne uegentlige planintegral er konvergent med værdien $-\pi$.
(l) Det givne uegentlige planintegral er konvergent med værdien $\frac{4}{3}$.

MA2 177. (e) Det givne uegentlige rumintegral er konvergent med værdien 0.
MA2 178.
(a) $M_D = [\frac{3}{2};+\infty[$, $M_C =]-\infty;\frac{3}{2}[$, $\int_A (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha}\,d\Omega = \frac{4\pi}{3-2\alpha}$ for $\alpha \in M_C$.

Tangentielt kurve-integral

MA2 202. (a) $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = \frac{1}{35}$.

MA2 206. (a) $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = 0$. (b) $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = -1$. (c) $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = e - 1 + \ln(2)$.

MA2 207.

(h) $\underline{V}$ er et gradientfelt og samtlige stamfunktioner til $\underline{V}$ i $\mathbf{R}^3$ er
$F(x,y,z) = \sinh(xy) + yz + k$, $k \in \mathbf{R}$.

(j) $\underline{V}$ er et gradientfelt og samtlige stamfunktioner til $\underline{V}$ i $\mathbf{R}^3$ er
$F(x,y,z) = \text{Arctan}(xy + z^2) + k$, $k \in \mathbf{R}$.

MA2 210. 1. $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = 0$. 2. Da $\frac{\partial V_x}{\partial y} \neq \frac{\partial V_y}{\partial x}$ er $\underline{V}$ ikke et gradientfelt

Divergens og Gauss' sætning

MA2 220. (b) $\Phi = \frac{11}{6}$. (d) $\Phi = 180\pi$. (g) $\Phi = \frac{4}{5}\pi a^5$. (h) $\Phi = \frac{16}{3}\pi abc$.

MA2 222. $\Phi = 4\pi$.

Stokes' sætning

MA2 226. (a) $C = \pi$. (i) $C = \pi a^3$. (j) $C = 6\pi a^4$.

MA2 227. (a) $\Phi = \int_F \underline{n} \cdot \underline{\text{rot}}\ \underline{V}\, dS = \pi a^2$.

Potentialer

MA2 242. $\text{div}\underline{V} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} f \times \underline{\nabla} g) = 0$.

MA2 247. $\alpha = \frac{1}{2}$.

MA2 405. $\text{div}\underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 5$. $\underline{\text{rot}}\ \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = (0,0,7-x)$. $\Phi = \frac{20}{3}\pi$.

MA2 435.

1. $\underline{V} = \underline{\nabla} f = (2a^2x, a^3, 4z^3)$. $\int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = 6a^4$.
2. $\Phi = \frac{44}{15}\pi a^5$.

MA2 471.

1. $\text{div}\underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 0$.
2. $\underline{\text{rot}}\ \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = -\underline{V}$. Dvs. $\alpha = -1$ og $\underline{W}_0 = -\underline{V}$ er et vektorpotential for $\underline{V}$.

MA2 496.

1. $\text{div}\underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 0$. $\underline{\text{rot}}\ \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = -\underline{V}$.
2. Af 1. fås, at $\underline{V} = \underline{\nabla} \times (-\underline{V}) = \underline{\text{rot}}\ (-\underline{V})$. Dvs. $-\underline{V}$ er et vektorpotential for $\underline{V}$.
3. $C = \int_K \underline{V} \cdot \underline{t}\, ds = 2\pi$.
4. $\Phi = \int_{\partial\Omega} \underline{U} \cdot \underline{n}\, dS = 28\pi$.